Mikroökonomik A Repetitorium 2022

Fachschaft BWL

Ablauf und Organisatorisches

- **Ziel: Praxisorientierte Klausurvorbereitung**
  - Wiederholung und Erklärung des Vorlesungsstoffs
  - Praktische Anwendung
  - Fragen
- **Zeitlicher Ablauf**
  - 04.06., 9-15 Uhr, Mittagspause 12,30 - 13 Uhr (aber flexibel)
  - 05.06., 9-15 Uhr, Mittagspause 12,30 - 13 Uhr (+ Q&A)
- **Bitte**
  - Mikrofon grundsätzlich aus, es sei denn ihr wollt eine Frage stellen – dann gerne unterbrechen (z.B. Hand heben) und Frage *mündlich* (nicht im Chat) vortragen
  - Kameras bitte anmachen (visuelles Feedback sehr wichtig insbesondere bei Verständnisfragen)
  - Stellt Fragen
  - Probiert die Aufgaben selbst zu rechnen
- **Sämtliche Inhalte ohne Gewähr auf Richtigkeit und Vollständigkeit. Bitte *nicht* öffentlich digital weiterverbreiten. Danke!**

Überblick

1. **Konsumententheorie (voraussichtlich heute)**
   a) Präferenzen und Nutzenfunktion
   b) Optimierung und Nachfrage
   c) Freizeit-Konsum-Modell
   d) Intertemporale Entscheidungen

2. **Produktionstheorie (voraussichtlich morgen)**
   a) Produktionsfunktionen
   b) Kosten
   c) Angebot

3. **Gleichgewichtstheorie (voraussichtlich morgen)**
   a) Partielles Gleichgewicht
   b) Wohlfahrt
   c) Tauschökonomie

1. Konsumententheorie

Fragestellungen

- Was finden Menschen gut/besser/am besten?
  → **Präferenzen und Nutzenfunktionen**

- Wie entscheiden sich die Menschen, wenn sie begrenzte Ressourcen haben?
  → **Optimierung und Nachfrage**

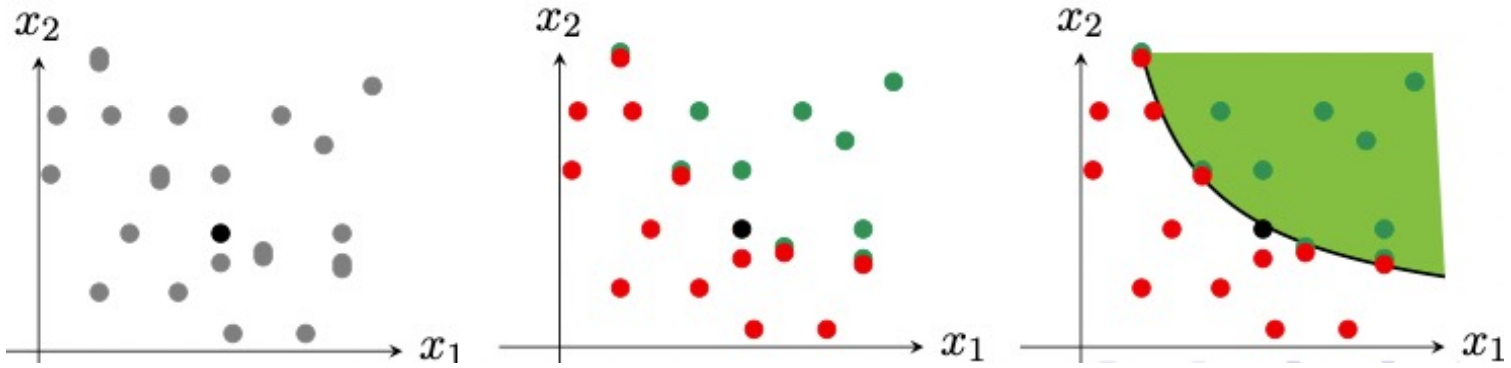
- Wie können wir unsere Erkenntnisse auf die Entscheidung der Menschen zwischen Konsum und Freizeit anwenden?
  → **Freizeit-Konsum-Modell**

- Wie können wir unsere Erkenntnisse auf den gesamten Konsum in verschiedenen Perioden verallgemeinern?
  → **Intertemporale Entscheidungen**

1a) Präferenzen und Nutzenfunktionen (PuN): Präferenzen

- **Präferenzen** beschreiben, wie Konsumenten verschiedene Güterbündel bewerten/vergleichen
- Man betrachte zwei Güterbündel $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$:
  1) $x \succ y \Leftrightarrow x \gtrsim y$ und $x \not\lesssim y$: *x* wird *y* strikt vorgezogen (**strikte Präferenz**)
  2) $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x \gtrsim y$ und $x \lesssim y$: *x* wird *y* schwach vorgezogen (**schwache Präferenz**)
  3) $x \sim y \Leftrightarrow x \gtrsim y$ und $x \lesssim y$: Konsument ist indifferent zwischen *x* und *y* (**Indifferenz**)

- ausgehend davon definiert bzw. unterscheidet man:
- die **Bessermenge** von x' $\{x|x \gtrsim x'\}$: Menge aller Güterbündel *x*, die gegenüber *x'* schwach präferiert werden (d.h. entweder „besser" oder zumindest „gleich gut sind")
- die **Schlechtermenge** von x' $\{x|x \lesssim x'\}$ und
- die **Indifferenzmenge** von x' (oder **Indifferenzkurve**) $\{x|\ x \sim x'\}$



1a) Eigenschaften von Präferenzen

- **Rationalität**
  - Eine Präferenzordnung ist rational, wenn sie vollständig *und* transitiv ist

- **Vollständigkeit:** für alle Alternativen x und y gilt $x \succsim y$ oder $y \succsim x$
  - Alle Güterbündel sind durch Präferenzen im Vergleich zueinander beschrieben und somit vergleichbar (Wissen, welche Bündel man präferiert und zw. welchen man indifferent ist)

- **Transitivität:** für alle Alternativen x, y und z gilt: wenn $x \succsim y$ und $y \succsim z$, dann $x \succsim z$
  - Die Präferenzen sind konsistent: x ≽ y und y ≽ z → Logische Folge bei Transitivität: x ≽ z

- **Monotonie:** wenn x ≥ y → x ≽ y bzw. x > y→ x ≻ y
  - Je mehr ich von einem Gut habe, desto besser

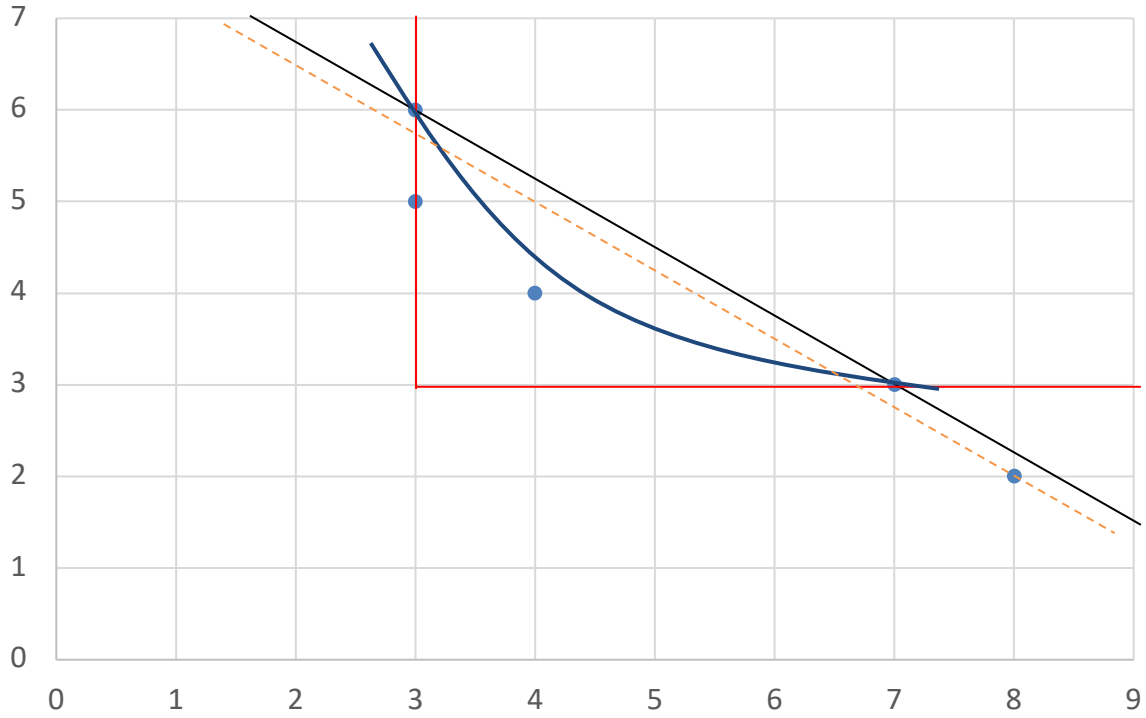
- **Konvexität:** falls $y \succsim x$ und $z \succsim x$, dann $\lambda y+(1-\lambda)z \succsim x$ für alle $0 \leq \lambda \leq 1$
  - Wenn Konvexität gilt, ist die Bessermenge eine konvexe Menge
  - Bedeutung: Gemischte Bündel werden gegenüber extremen Bündeln vorgezogen

- **Pareto-effiziente Allokation:** wenn die Allokation durch keine andere pareto-dominiert wird
  - eine Pareto-optimale Allokation kann nicht mehr verbessert werden (sonst jemand schlechter)

1a) Präferenzen: Arbeitsauftrag (10 Minuten)

29. Ein Konsument hat die monotone und konvexe Präferenzrelation $\succeq$ über Güterbündel (x_1, x_2) (mit $x_i \geq 0$ für $i = 1,2$). Nehmen Sie an, dass $(3,6) \succeq (7,3)$ und $(7,3) \succeq (3,6)$. Dann gilt

(a) $(7,3) \succ (8,2)$
(b) $(4,4) \succ (7,3)$
(c) $(3,5) \succ (8,2)$
(d) $(4,4) \succ (8,2)$
(e) $(3,5) \succ (7,3)$



monotone Präferenzen
$\Rightarrow$ IDK schwach fallend

konvexe Präferenzen
$\Rightarrow$ IDK konvex

Indifferenz zw. (7,3) & (3,6)
$\Rightarrow$ liegen auf selber IDK

möglicher IDK-Verlauf?

richtige Lösung: (a) (20/1)

1a) Nutzenfunktion u(x) – Definition und Eigenschaften

- Nutzenfunktionen kann man als **Repräsentation von Präferenzen durch Zahlen** auffassen
- **Definition:** jeder Alternative (z.B. Güterbündel) *x* wird eine Zahl *u(x)* (der Nutzen von *x*) zugeordnet, so dass gilt $x \succcurlyeq x' \Leftrightarrow u(x) \geq u(x')$

- allerdings: **Voraussetzungen für die Existenz einer *u(x)***: **Präferenzen rational (und stetig)**
- d.h. auch: Wenn eine Präferenzrelation durch eine Nutzenfunktion *u(x)* repräsentiert werden kann, ist die Präferenzrelation rational (vollständig & transitiv) und stetig (in Mikro unterstellt)

- **Grenznutzen $MU_i(x_1, \ldots, x_n)$ für Gut i ist die Ableitung der Nutzenfunktion nach x_i** und beschreibt den Nutzengewinn durch Erhöhung des Konsums um eine marginale Einheit x_i

---

- **Präferenzrelation monoton** ⇔ Nutzenfunktion ist (schwach) monoton wachsend

  $\Leftrightarrow {du}/{dx_1} \geq 0 \; und \; {du}/{dx_2} \geq 0$

- **Präferenzrelation konvex** ⇔ **Alle Bessermengen sind konvex**

  ⇔ Nutzenfunktion ist quasikonkav (immer wenn konkav)

  falls ${d^2 g_y(x_1)}/{d^2 x_1} \geq 0$ ***und* Präferenzen monoton**

1a) Nutzenfunktion – Positive monotone Transformation

- Die Nutzenfunktion kann **transformiert** werden, da nicht der Nutzenwert selbst, sondern nur die Relation (>, <, =) zu anderen Nutzenwerten von Interesse ist
  - Bsp.: u(x) = 9; u(x‘) = 4 → u(x) > u(x‘) versus √u(x) = 3; √u(x‘) = 2 → u(x) > u(x‘)
- **Positive monotone Transformation =** jede *strikt* wachsende Funktion $h(u(x))$, die jedem Nutzenwert $u(x)$ einen (anderen) Nutzenwert $\hat{u}(x) = h(u(x))$ zuordnet
- Repräsentiert u(x) die Präferenzen, so tut es auch jede positiv monotone Transformation von u
- bzw.: **Jede positiv monotone Transformation von u(x) repräsentiert dieselben Präferenzen**
- **Häufig genutzte Transformationen**
  - **additive Konstante:**
    $\hat{u}(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) + c$, $c \in R$, c fest
  - **positive, multiplikative Konstante:**
    $\hat{u}(x_1, x_2) = d \cdot u(x_1, x_2)$, $d > 0$, d fest
  - **Exponenten-Anpassung:** $\hat{u}(x_1, x_2) = u(x_1, x_2)^a$ $(u(x_1, x_2) = (x_1)^3 x_2$ & $\hat{u}(x_1, x_2) = x_1 (x_2)^{1/3})$
  - **ln:** $\hat{u}(x_1, x_2) = \ln(u(x_1, x_2)) = \ln\left(x_1^c x_2^d\right) = c \ln x_1 + d \ln x_2$ (wichtig!!!)

1a) Nutzenfunktion – Additiv-separable Präferenzen

- **Additiv-separable Präferenzen:** Präferenzen (über $I = 2$ Güter), die sich durch eine Nutzenfunktion der Form $u(x) = U_1(x_1) + U_2(x_2)$ darstellen lassen, wobei die U_i irgendwelche Funktionen sind.

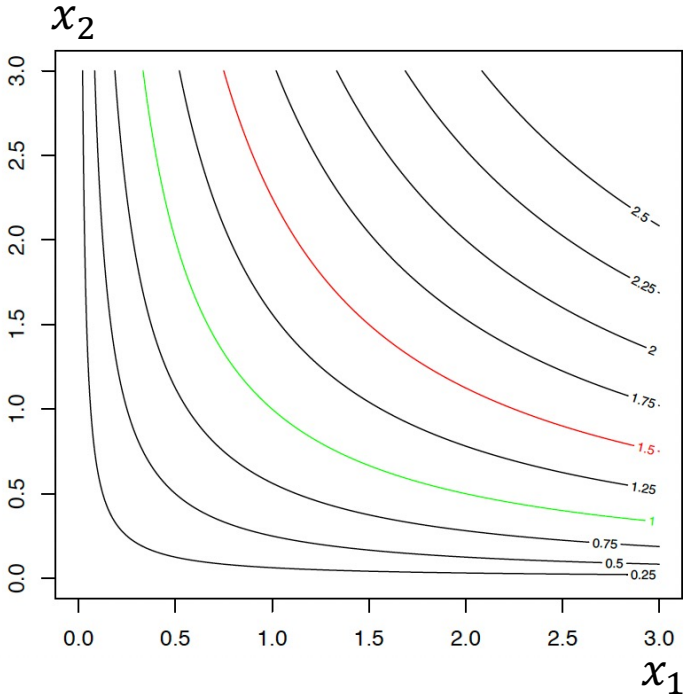
- **Beispiele für additive Separabilität:**
  - (a) Perfekte Substitute: $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
  - (c) Cobb-Douglas-Präferenzen: $u(x_1, x_2) = c \ln(x_1) + d \ln(x_2)$
  - (d) Quasi-lineare Präferenzen: $u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$

- **Gegenbeispiel:**
  - (b) Perfekte Komplemente: $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$

- **Bedeutung/Relevanz der additiven Separabilität**
  - bei (monotonen & konvexen) additiv-separablen Präferenzen sind beide Güter überall ***normal***

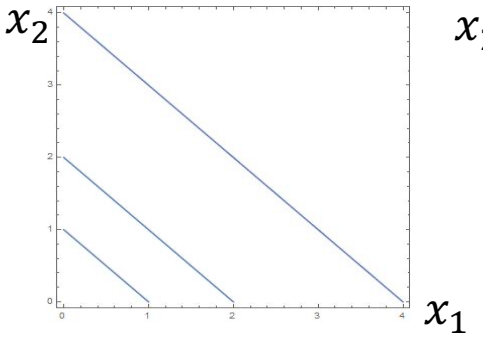
1a) Indifferenzkurven – Definition, Herleitung, Steigung

- Auf der **Indifferenzkurve** liegen alle Güterbündel, die *denselben Nutzen* für den Konsumenten haben → Konsument ist indifferent, welches der Güterbündel auf der IDK er besitzt
- Indifferenzkurve $g_y(x_1)$ = Rand der Bessermenge = die **Indifferenzmenge** von x' $\{x \mid x \sim x'\}$
- **Herleitung der IDK aus einer Nutzenfunktion?**
- **=> Umformung/Auflösen der Nutzenfunktionsgleichung nach x_2**
- Bsp.1: $\bar{u}(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \Leftrightarrow g_y(x_1) := x_2 = \bar{u}(x_1, x_2) - x_1$
- Bsp. 2: $\bar{u}(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d \Leftrightarrow g_y(x_1) := x_2 = \left(\frac{\bar{u}(x_1, x_2)}{x_1^c}\right)^{1/d}$
- **Steigung der IDK:** $GRS_{1,2}(y) = (g_y)'(y_1)$
- bei monotonen Präferenzen gilt: $GRS_{1,2}(y) \leq 0$
- $GRS_{1,2}(y) = = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(y)}{\frac{\partial u}{\partial x_2}(y)}$
- $\left|GRS_{1,2}(y)\right|$: max. Menge von Gut 2, die ein Individuum für eine Einheit von Gut 1 aufzugeben bereit ist

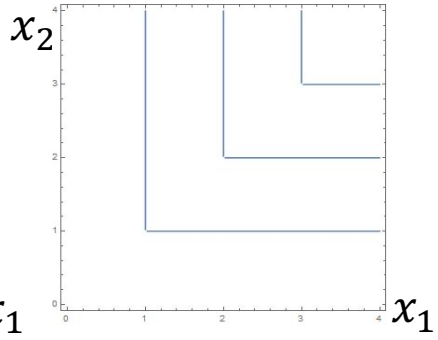


1a) Indifferenzkurven – Abhängigkeit von Präferenzen

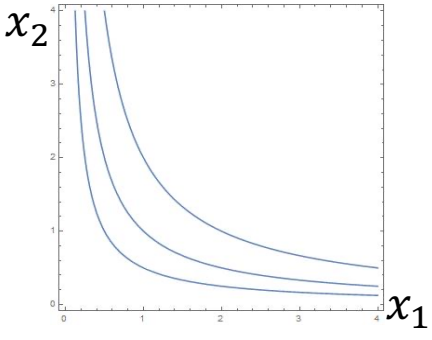
- Auf der **Indifferenzkurve** liegen alle Güterbündel, die denselben Nutzen für den Konsumenten haben → Konsument ist indifferent, welches dieser Güterbündel er besitzt
- je nach Präferenzrelation und Nutzenfunktion sehen Indifferenzkurven **unterschiedlich** aus:



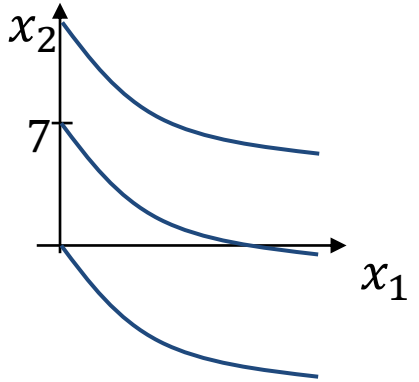
Perfekte Substitute



Perfekte Komplemente



Cobb-Douglas



Quasilineare Präferenzen

- Präferenzen sind…
  - **Vollständig** → Es gibt eine Indifferenzkurve durch jedes Güterbündel x
  - **Monoton** →
    - Güterbündel auf den vom Ursprung weiter entfernten Indifferenzkurven präferiert
    - Indifferenzkurven sind (schwach) fallend (daher gilt $GRS_{1,2}(y) \leq 0$)
  - **Monoton und vollständig** → Indifferenzkurve ist konvex

1a) Grenzrate der Substitution (GRS)

- **Definition**
  - Maximale Menge eines Gutes, die ein Konsument bereit ist aufzugeben, um eine marginale Einheit eines anderen Gutes zu erhalten.
  - Frage: Wie viele Einheiten x_2 müssen reduziert werden bei gleichzeitiger Erhöhung von x_1 um eine marginale Einheit, um auf derselben Indifferenzkurve zu bleiben? → $GRS_{1,2}$

- **Steigung der Indifferenzkurve = GRS:** $GRS_{1,2}(y) = = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(y)}{\frac{\partial u}{\partial x_2}(y)}$ (Grenznutzenformel)

- **Eigenschaften**
  - Präferenzen monoton → $GRS_{1,2}(x_1,x_2) \leq 0$ (IDK fallend) (nicht umgekehrt?!)
  - Präferenzen konvex → $GRS_{1,2}(x_1,x_2)$ nach x_1 abgeleitet ≥ 0 (IDK immer flacher)

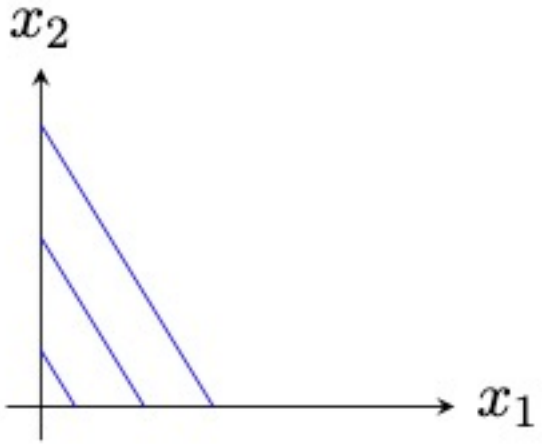
- **Die Grenzrate der Substitution ist unabhängig von der gewählten Transformation.**
  - Kriterium: u und $\tilde{u}$ repräsentieren dieselbe Präferenzrelation

$$-\frac{MU_1(x_1,x_2)}{MU_2(x_1,x_2)} = GRS_{1,2}(x_1,x_2) = -\frac{M\tilde{U}_1(x_1,x_2)}{M\tilde{U}_2(x_1,x_2)} \; \forall \; x_1,x_2$$

1a) Verschiedene Präferenzklassen: Substitute

- **$u(x_1,x_2) = a*x_1 + b*x_2$**
- ***Konstante* $GRS_{1,2}(x_1,x_2) = - a/b$**
- Dem Konsumenten ist es egal, ob a*Gut 1 oder b*Gut 2 konsumiert wird
- **Monoton** und schwach **konvex**
- Perfekte Substitute: a=b=1

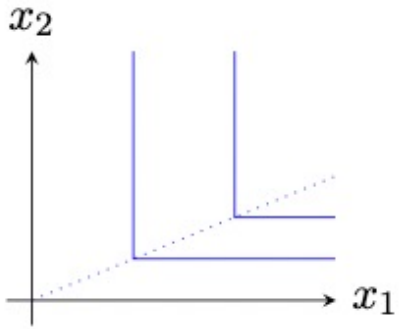
- Beispiel: $u(x_1,x_2) = 3*x_1 + 2*x_2$
  - $GRS_{1,2}(x_1,x_2) = - 3/2$ → **GRS ist bei Substituten konstant!**
  - Für jedes zusätzliche Gut 1 würde der Konsument 1,5 Gut 2 aufgeben.



1a) Verschiedene Präferenzklassen: Komplemente

- **$u(x_1,x_2) = \min \{a*x_1 ; b*x_2\}$**
- Indifferenzkurven haben an folgender Stelle einen „Knick“: $a*x_1 = b*x_2$
- $$GRS_{1,2}(x_1,x_2) = \begin{cases} -\infty & \text{für } ax_1 < bx_2 \\ 0 & \text{für } ax_1 > bx_2 \\ \text{nicht definiert} & \text{für } ax_1 = bx_2 \end{cases}$$
- Schwach **monoton** und schwach **konvex**
- Perfekte Komplemente: a=b

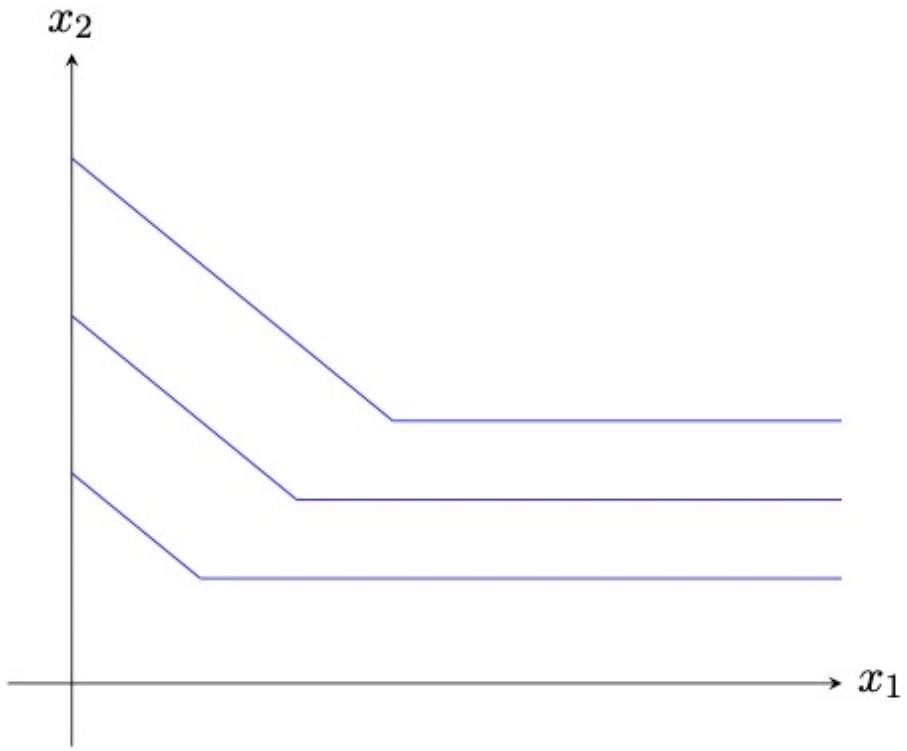
1. Klassisches Beispiel für perfekte Komplemente: Linker und rechter Schuh
2. Beispiel für “normale“ Komplemente: Es wird immer ein Tee (Gut 1) mit zwei Zuckerwürfeln (Gut 2) getrunken



1a) „Falsche“ Komplemente

- Unsaubere Trennung der Variablen

- Beispiel: $u(x_1,x_2) = \min \{x_1 + x_2; 2x_2\}$
  → Wie sehen die Indifferenzkurven aus?



1a) Verschiedene Präferenzklassen: Cobb-Douglas

- $u(x_1,x_2) = x_1^c\, x_2^d$
- Wichtige Transformationen:

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = c\ln(x_1) + d\ln(x_2)$$

$$\hat{u}(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \text{ mit } \alpha = \frac{c}{c+d}$$

- Präferenzen sind **monoton** und <u>streng</u> **konvex**
- $GRS_{1,2}(x_1, x_2) = -\frac{c}{d}\frac{x_2}{x_1}$

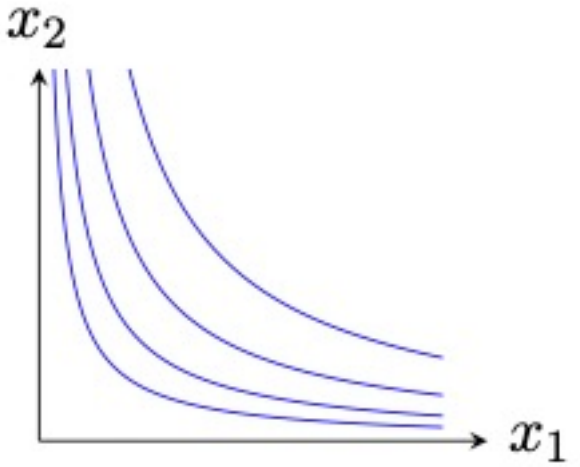


Abbildung: $c = d = 0.5$

1a) Präferenzklassen: Quasilineare Präferenzen

- **$u(x_1,x_2) = v(x_1) + x_2$**

- $v(x_1)$ = Zahlungsbereitschaft (ZBS)
- x_2 = Übriges Geld

- Marginale Zahlungsbereitschaft = $v'(x_1)$
- **$GRS_{1,2}(x_1,x_2) = - v'(x_1)$**

- Eigenschaften
  - **Monotone** Präferenzen, wenn $v'(x_1) \geq 0$
  - **Konvexe** Präferenzen, wenn $v''(x_1) \leq 0$
  - $GRS_{1,2}(x_1,x_2)$ ist unabhängig von x_2
  - Indifferenzkurven liegen parallel übereinander

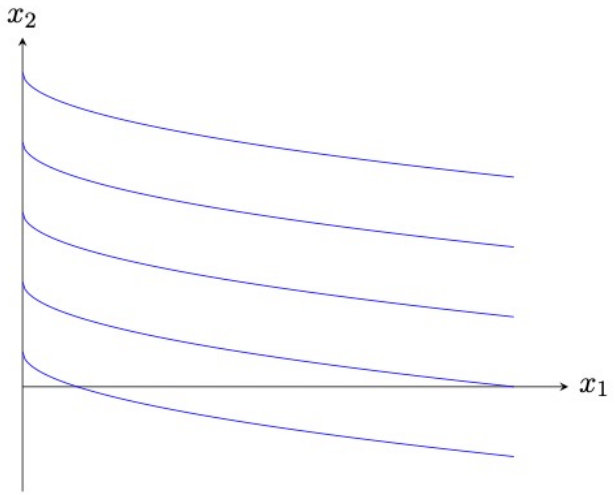


Abbildung: Quasilineare Präferenzen: grafische Darstellung für $\nu(x_1) = \sqrt{x_1}$

1a) Prüfung der Monotonie und Konvexität von Präferenzen

I. Monotonie

- Präferenzrelation monoton ⇔ Nutzenfunktion ist (schwach) monoton wachsend

$$\Leftrightarrow {}^{du}/_{dx_1} \geq 0 \; \boldsymbol{und} \; {}^{du}/_{dx_2} \geq 0$$

- und wenn man schon weiß, dass die Präferenzrelation monoton ist, dann $\boldsymbol{GRS_{1,2}(y) \leq 0}$
- aber wohl nicht umgekehrt, da auch bei $u = -x_1 - x_2$ ist $GRS_{1,2}(y) \leq 0$, aber nicht monoton!

II. Konvexität

Vier Alternativen, um die Konvexität prüfen *(Richtung der Aussagen zu beachten!)*

1. Wir erkennen die Präferenzen als eine **Klasse, die immer konvex** ist (perf. Substitute, perf. Komplemente, Cobb-Douglas)
2. Wir überlegen uns, wie alle **Bessermengen** aussehen und prüfen auf **Konvexität**
3. **Präf. monoton UND** Ableitung von GRS nach $x_1 \geq 0$ —> **GRS betragsmäßig fallend in x_1 bzw.** ${}^{d^2 g_y(x_1)}/_{d^2 x_1} \geq 0 \; \boldsymbol{und}$ **Präferenzen monoton** $\frac{\partial}{\partial x_1} GRS_{1,2}(x_1, x_2) \geq 0$
4. **Nutzenfunktion** ist **quasikonkav** (wenig praktikabel, da eher kompliziert)

1a) Monotonie und Konvexität – Übungsaufgabe

- Thomas konsumiert das Güterbündel (x_1,x_2). Er findet das Bündel (x_1,x_2) genau dann schwach besser als ein anderes Bündel (x'_1,x'_2), wenn $(x_1 + 1)x_2 \geq (x'_1 + 1)x'_2$.

1. **Ist Thomas' Präferenz monoton?**
   a) Was ist die Nutzenfunktion?

   $u(x1, x2) = (x_1 + 1)x_2 = x_1 x_2 + x_2$

   b) Ist Thomas' Präferenz monoton?

   $^{du}/_{dx_1} = x_2 \geq 0$ und $^{du}/_{dx_2} = x_1 + 1 \geq 0$ => **Präferenz monoton**

2. **Ist Thomas' Präferenz konvex?**

   - Präferenz monoton, also zu prüfen, ob $\frac{\partial}{\partial x_1} GRS_{1,2}(x_1, x_2) \geq 0$
   - $GRS1,2\ (x1, x2) = -\frac{x_2}{x_1 + 1}\ (\leq 0)$

$$\frac{d}{dx_1} GRS_{1,2}(x_1, x_2) = \frac{x_2}{(x_1+1)^2} \geq 0$$

   - **Präferenz auch konvex**

1a) Arbeitsauftrag – Altklausuraufgabe (Lösung)

(1) Repräsentiert die Nutzenfunktion u = $\min\{6x_1, 3x_2\}$ **Lisas Präferenzen? JA!**

- Lisa trinkt immer einen Kaffee mit 2 Teelöffeln Zucker => Komplemente
- allgemein bei Komplementen gilt u = $\min\{ax_1, bx_2\}$ = $ax_1 = bx_2$ (z.B. $\min\{2, 2\}$ = 2)
- hier mit $x_1 = 1$ und x_2= 2 ergibt sich: $a = 2b$
- also passende Nutzenfunktion z.B.: u = $\min\{x_1, 0.5x_2\}$
- und eine positive monotone Transformation davon ist eben u = $\min\{6x_1, 3x_2\}$

(2) Repräsentiert die Nutzenfunktion u = $2x_1 + x_2$ **Lisas Präferenzen? NEIN!**

- das wären Substitute, sie möchte aber die 2 Güter gemeinsam in einem festen Verhältnis konsumieren, also handelt es sich um Komplemente

(3) Repräsentiert die Nutzenfunktion u = $\min\{7x_1, 14x_2\}$ **Lisas Präferenzen? NEIN!**

- zwar positive monotone Transformationen zulässig, hier aber falsches Verhältnis von a und b

(4) Ist Lisas Präferenzrelation (schwach) konvex? JA!

- Komplemente bilden (schwach) konvexe Präferenzen ab

(5) Ist Lisas GRS von Gut 2 für Gut 1 am Punkt (2, 2) gleich –2? NEIN!

- bei Komplementen kommen als GRS in Betracht nur: −∞, 0 oder nicht definiert

$$GRS_{1,2}(x_1, x_2) = \begin{cases} -\infty & \text{für } ax_1 < bx_2 \\ 0 & \text{für } ax_1 > bx_2 \\ \text{nicht definiert} & \text{für } ax_1 = bx_2 \end{cases}$$

1a) Arbeitsauftrag – Altklausuraufgabe (10/15 Minuten)

(1) Wenn (3, 3) $\succcurlyeq$ (1, 1) und Lisas Präferenzen monoton, dann (2, 2) $\succcurlyeq$ (1, 1)? JA!

- Monotonie = jedenfalls wenn von beiden Gütern mehr, so (zumindest schwach) präferiert
- dies bei (2,2) im Vergleich zu (1,1) erfüllt, also (2, 2) $\succcurlyeq$ (1, 1) (Angabe (3, 3) $\succcurlyeq$ (1, 1) irrelevant)

(2) Wenn (9, 5) $\succcurlyeq$ (1, 1) und Lisas Präferenzen konvex, dann (3, 2) $\succcurlyeq$ (1, 1)? JA!

- Konvexität: jede Konvexkombination eines Bündels mit einem anderen Bündel aus seiner Bessermenge $\succcurlyeq$ das ursprüngliche Bündel
- hier das ursprüngliche Bündel (1,1)
- laut Aufgabenstellung gilt (9, 5) $\succcurlyeq$ (1, 1), also liegt (9,5) in der Bessermenge von (1,1)
- (3,2) darstellbar als Konvexkombination von (9,5) und (1,1), da (3,2) = ¼(9,5) + ¾(1,1)
- daraus folgt (3, 2) $\succcurlyeq$ (1, 1) (ohne dass hier die Annahme der Monotonie erforderlich wäre)

(3) Wenn $\succcurlyeq$ stetig und monoton ist, dann gibt es eine entsprechende Nutzenfunktion? JA!

- eine Nutzenfunktion existiert, wenn P $\succcurlyeq$ stetig (hier ja) und rational (ja, da vollständig und transitiv, siehe Aufgabenstellung Infos im Text)

(5) Wenn x $\succcurlyeq$ y, z $\succcurlyeq$ w und y $\succ$ z, dann x $\succ$ w? JA!

- es ergibt sich x $\succcurlyeq$ y $\succ$ z $\succcurlyeq$ w und daraus folgt x $\succ$ w

1a) Arbeitsauftrag – Altklausuraufgabe (10/15 Minuten)

2013 Ersttermin – 1.1

Es gibt zwei Güter, 1 und 2, von denen beliebige nicht-negative Mengen konsumiert werden können. Lisa präferiert genau dann ein Güterbündel (x_1, x_2) schwach gegenüber einem Güterbündel (x_1', x_2') (das heißt, $(x_1, x_2) \succeq (x_1', x_2')$) wenn $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq (x_1' + 1)(x_2' + 1)$.

(1) Die Präferenzrelation $\succeq$ ist monoton.

(2) Die Präferenzrelation $\succeq$ ist konvex.

(3) Die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = (x_1 + 1)^2(x_2 + 1)^2$ repräsentiert die Präferenzen $\succeq$.

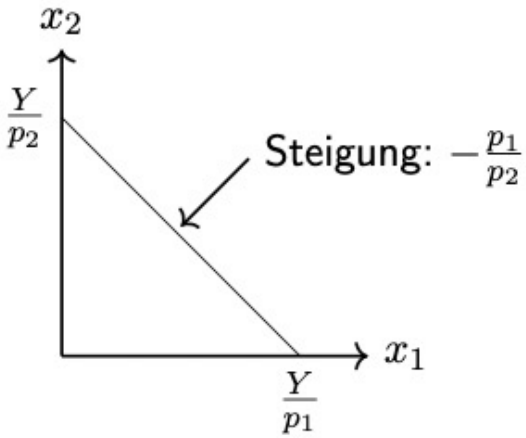
(4) Die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ repräsentiert die Präferenzen $\succeq$.

(5) Die Grenzrate der Substitution an irgendeinem Punkt (x_1, x_2) hängt von der gewählten Nutzenrepräsentation der Präferenzrelation $\succeq$ ab.

1b) Optimierung und Nachfrage: Budgetbeschränkung

- Konsumenten verfügen über ein Budget Y , also eine Beschränkung der Ressourcen
- **Budgetgrade:**
  - Beschreibt alle Güterbündel, bei denen der Konsument sein gesamtes Budget Y ausgeben würde → Frage: **Welches dieser Bündel maximiert den Nutzen?**

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = Y$$



  - **Walras' Gesetz:** Um den Nutzen zu maximieren, geben Konsumenten ihr gesamtes Budget aus.

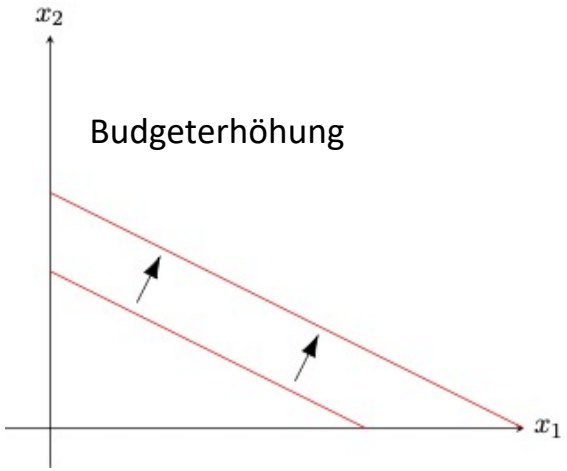
1b) Budgetveränderung

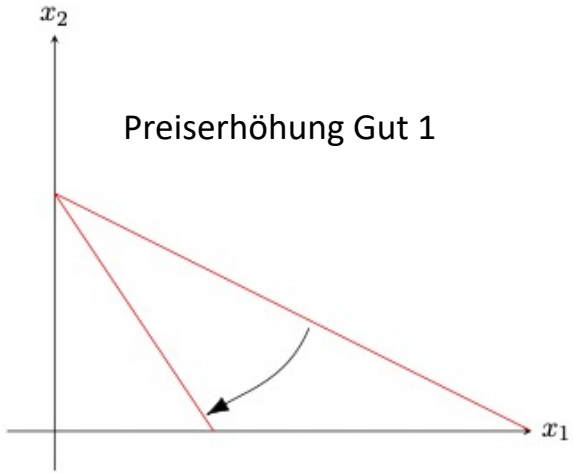
1. Das Budget Y kann sich durch eine **Einkommensänderung** verändern
   - Budgetgerade verschiebt sich parallel zur ursprünglichen Budgetgerade nach innen (Budgetminderung) oder nach außen (Budgetvergrößerung)

2. **Preisänderung**
   - Preise ändern sich, wodurch der Konsument mit dem gleichen zur Verfügung stehenden Budget Y mehr bzw. weniger Güter kaufen kann

   a. Preiserhöhung: Drehung der Budgetgeraden nach innen

   b. Preissenkung: Drehung der Budgetgeraden nach außen





1b) Optimierung – Präferenzen und Budget

- **Ziel: Maximierung der Nutzenfunktion $u(x_1,x_2)$**
- unter den **Nebenbedingungen**:
  1. $p_1^* x_1 + p_2^* x_2 = Y$
  2. $x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$

- **Drei Optionen**
  1. Inneres Optimum: $$GRS_{1,2}(x_1^*, x_2^*) = -\frac{MU_1(x_1^*, x_2^*)}{MU_2(x_1^*, x_2^*)} = -\frac{p_1}{p_2}$$
  2. $x_1^* = 0$: $GRS_{1,2}(x_1^*,x_2^*) \geq - p_1/p_2$
  3. $x_2^* = 0$: $GRS_{1,2}(x_1^*,x_2^*) \leq - p_1/p_2$

- **Intuition**: Die Austauschrate am Markt ist $- p_1/p_2$, die „Austauschbereitschaft“ ist $GRS_{1,2}(x_1, x_2)$

1b) Optimierung: Präferenzen und Budget

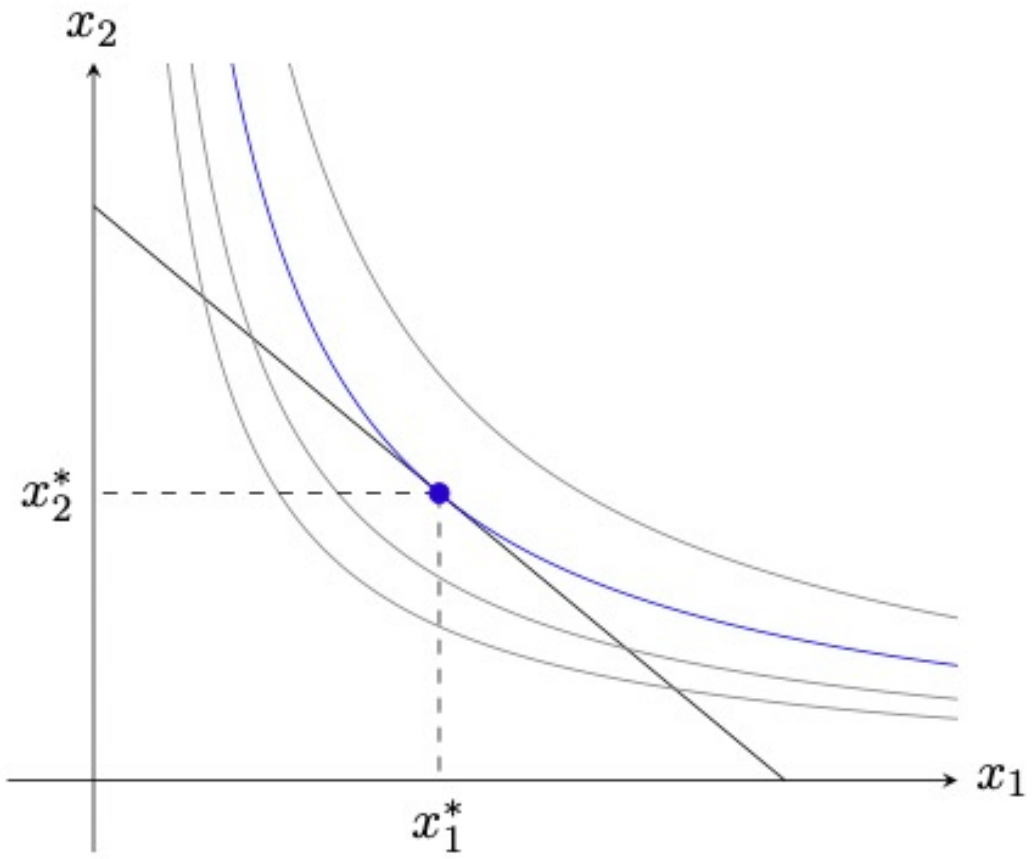
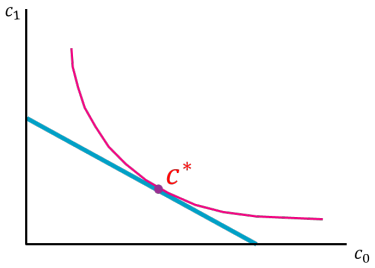
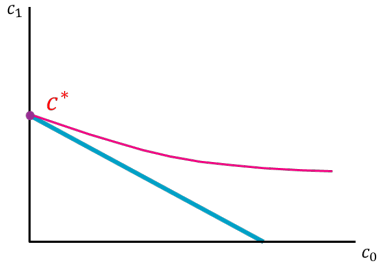


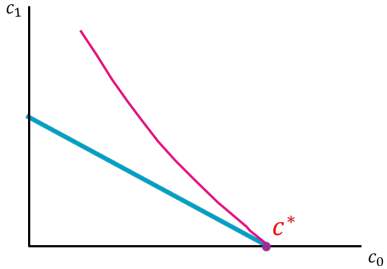
Abbildung: Optimale Entscheidung im Falle einer inneren Lösung

1b) Optimierung – Bedingungen erster Ordnung

- Bedingungen erster Ordnung sind Optimalitätskriterien, mit denen *mögliche* Optimalpunkte eines (mathematischen) Problems gefunden werden können (BEO sind im Allgemeinen nur notwendig)
- wenn die zugrunde liegenden Präferenzen konvex sind, sind BEO hinreichend: alle Alternativen x^*, die die Bedingungen erster Ordnung erfüllen, sind *tatsächliche* Optimalpunkte
- sind BEO nicht hinreichend, findet man den (die) optimalen Punkt(e) durch Nutzenvergleich der Alternativen x^*, die die Bedingungen erster Ordnung erfüllen
- BEO sind Anforderungen an die ersten Ableitungen der auftretenden Funktionen, bei uns also Anforderungen an die Steigung der Indifferenzkurven, wobei bei wirtschaftlichen Optimierungsproblemen 3 Fälle auftreten können (3 Anforderungen an die Steigung der IDK formuliert werden):







1. «Innere Lösung» $x_1^* > 0, x_2^* > 0$: BEO: *Walras' Gesetz* & $\text{Steigung}_{IDK} = \text{Steigung}_{BG}$
2. «Randlösung» $x_1^* = 0$: BEO: *Walras' Gesetz* & $\text{Steigung}_{IDK} \geq \text{Steigung}_{BG}$
3. «Randlösung» $x_2^* = 0$: BEO: *Walras' Gesetz* & $\text{Steigung}_{IDK} \leq \text{Steigung}_{BG}$

1b) BEO – Arbeitsauftrag zur Wiederholung (1 Minute)

Notwendige Bedingungen

Vervollständigen Sie die notwendigen Bedingungen. Zeichnen Sie dazu eine kleine Skizze rechts daneben mit strikt konvexen Präferenzen.

innere Lösung: $x_1^* > 0$ und $x_2^* > 0$:

$$GRS_{1,2}(x_1^*, x_2^*) \qquad - \frac{p_1}{p_2}$$

Randlösung I: $x_1^* = 0$ und $x_2^* > 0$:

$$GRS_{1,2}(x_1^*, x_2^*) \qquad - \frac{p_1}{p_2}$$

Randlösung II: $x_1^* > 0$ und $x_2^* = 0$:

$$GRS_{1,2}(x_1^*, x_2^*) \qquad - \frac{p_1}{p_2}$$

1b) Optimales Bündel – Allgemeines Lösungsrezept

1. **Optimalitätsbedingung**, z.B. $GRS_{1,2}(x_1, x_2) \stackrel{!}{=} -\frac{p_1}{p_2}$ Oder $ax_1 \stackrel{!}{=} ax_2$ (perfekte Komplemente)
   - Eventuell: Randlösung
   - Ansonsten: Stelle nach einer der Unbekannten um und erhalte einen Ausdruck der Form $x_1^*(x_2^*)$ (oder anders herum wie im Beispiel)
2. Setze Ausdruck $x_1^*(x_2^*)$ in **Budgetbeschränkung** ein: $p_1 \underbrace{x_1^*}_{x_1^*(x_2^*)} + p_2 x_2^* \stackrel{!}{=} Y$
3. **Stelle nach x_2^* (oder x_1^*) um**, um x_1^* (x_2^*) auszurechnen

- **Beispiel:** Optimales Bündel bei der Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2$ und $p_1 = 4$ und $p_2 = 1$?
- bei Cobb-Douglas würde eine Randlösung keinen Sinn ergeben, also nur innere Lösung
- daher **Schritt1:** Ansatz: **Steigung$_{IDK}$ = Steigung$_{BG}$** $\Leftrightarrow \boldsymbol{GRS_{1,2}}(x_1, x_2) = -\frac{\boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{p_2}}$
- $GRS_{1,2} = -\frac{6x_1x_2}{3x_1^2} = -\frac{2x_2}{x_1}$ *und* $-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{4}{1}$ *also* $-\frac{2x_2}{x_1} = -\frac{4}{1}$ *daher* $x_2 = 2x_1$
- **Schritt 2**: $x_2 = 2x_1$ in Budgetgleichung einsetzen: $4\,x_1 + 2x_1 = Y$ also $6\,x_1 = Y$
- **Schritt 3:** nach x_1 auflösen: $\boldsymbol{x_1^* = \frac{Y}{6}}$ und daraus x_2 bestimmen: $\boldsymbol{x_2^* = 2x_1 = \frac{Y}{3}}$ (Einheiten)

1b) Vereinfachungen zur Berechnung des Optimums

1. **Perfekte Substitute**

$$x_i^* = \begin{cases} 0, & p_i > p_j \\ \frac{Y}{p_i} & p_i < p_j \\ \text{Budgetgerade} & p_i = p_j \end{cases} \qquad \text{(Randlösung)}$$

2. **Perfekte Komplemente**

$$x_1^* = x_2^* = \frac{Y}{p_1 + p_2}$$

3. **Cobb-Douglas Präferenzen mit $u(x_1,x_2) = x_1^c\, x_2^d$**

$$x_1^* = \frac{c}{c+d}\frac{Y}{p_1}, \qquad x_2^* = \frac{d}{c+d}\frac{Y}{p_2}$$

4. **Quasilineare Präferenzen (normalerweise $p_2 = 1$)**
   - In diesem Fall ist eventuell ein negatives x_2^* erlaubt/möglich

$$x_1^* = \begin{cases} \nu'^{-1}(p_1) & \text{falls } p_1 \leq \nu'(0) \\ 0 & \text{falls } p_1 > \nu'(0) \end{cases}$$

$$x_1^* \overset{!}{=} \nu'^{-1}(p_1) \iff \nu'(x_1^*) \overset{!}{=} p_1$$

$$x_2^* = Y - p_1 x_1^*$$

1b) Nachfragekurve

- **Nachfrage:** Die bei der Optimierung ermittelten x_1^* und x_2^* , die typischerweise abhängig von Preisen p_1, p_2 und Einkommen Y sind

$$x_i^* = d_i(p_1, p_2, Y)$$

- Die Nachfragekurve stellt den Zusammenhang zwischen x_i^* und p_i dar und ist Ergebnis der Optimierung von x_i. (p_j und Y konstant)

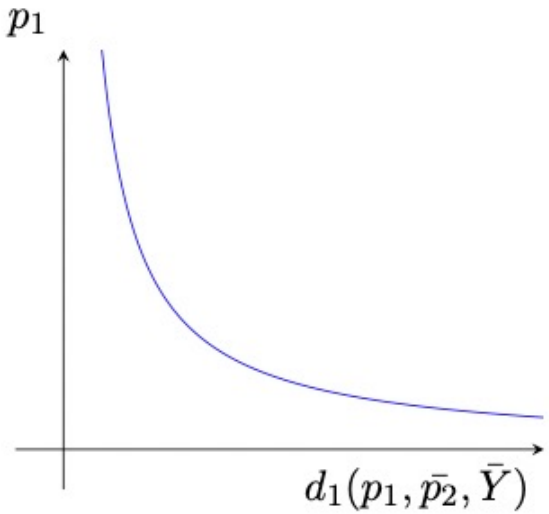
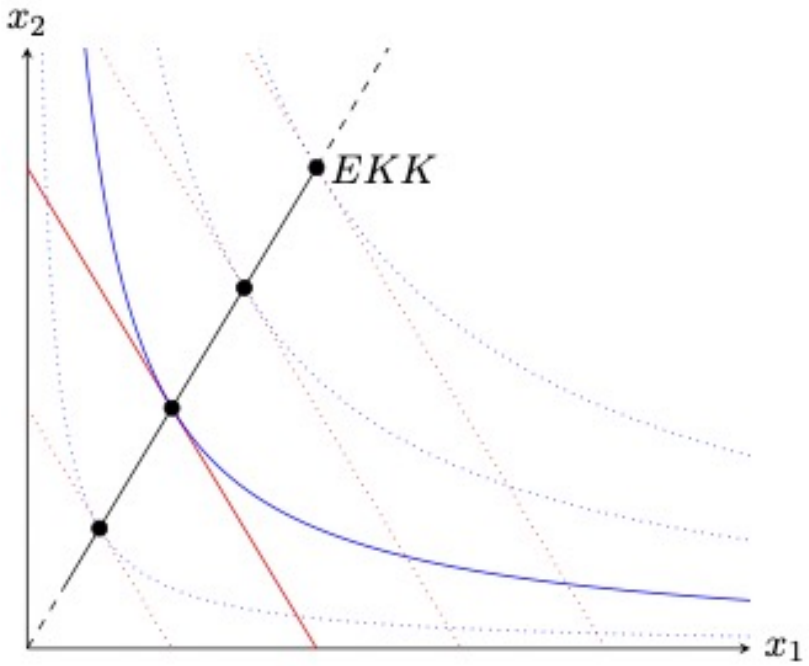


Abbildung: Nachfragekurve bei Cobb-Douglas Präferenzen

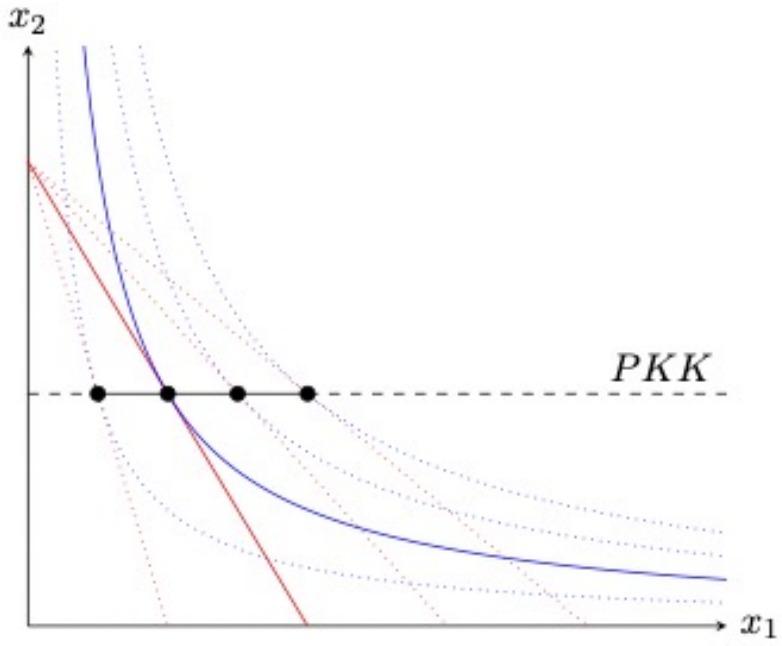
1b) Einkommen-Konsum-Kurve (EKK)

- die Einkommens-Konsum-Kurve gibt ***für jedes Einkommensniveau*** die ***optimale*** (=nutzen-maximierende) ***Güterkombination*** an
- „Spur“ des optimalen Bündels bei Veränderung des Einkommens Y
- Alle Güterpreise konstant gehalten, nur die Budgetgerade nach außen parallel verschieben und Berührungspunkte mit dazugehörigen Indifferenzkurven markieren

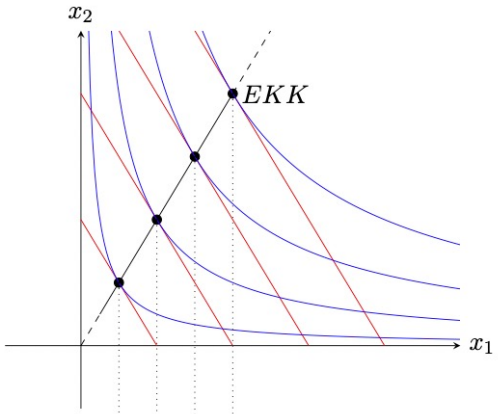


1b) Preis-Konsum-Kurve (PKK)

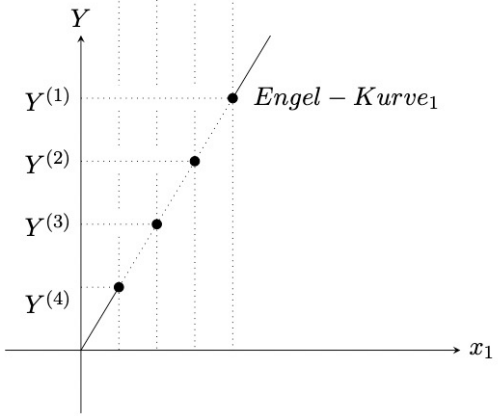
- **Definition:** Die Preis-Konsum-Kurve gibt an, wie die ***optimale Güterkombination vom Preisverhältnis*** abhängt
- **Vorgehensweise**: ***Y und p2*** werden ***konstant*** gehalten, während ***p1 variiert*** wird (die ***Budgetgerade*** wird ***gedreht*** – wird sie nach außen gedreht, so bedeutet dies niedrigeren p1)
- „Spur“ des optimalen Bündels bei Veränderung des Preises p_1



1b) Engelkurve

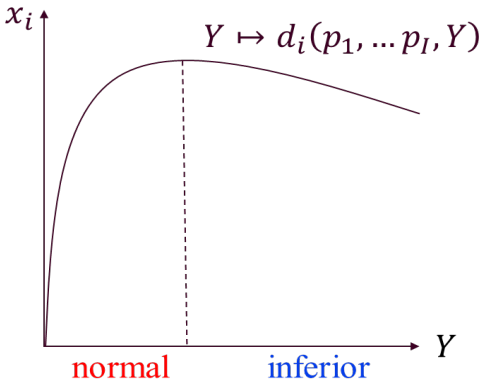


- Die **Engelkurve** beschreibt, wie der **Konsum *eines* bestimmten Gutes vom Haushaltseinkommen** abhängt.



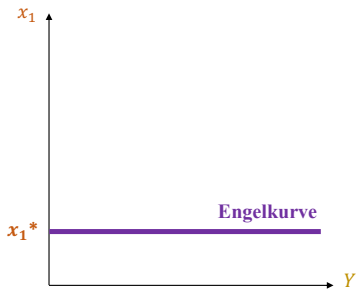
- Engelkurven können **mithilfe der Einkommens-Konsum-Kurven konstruiert** werden

- Engelkurve für Gut i
  - Halte alle Preise konstant und variiere nur das Einkommen Y
  - Notiere wie x_i^* sich ändert



- Der Verlauf der Engelkurve kann vom Wert der fixierten Preise der p_j abhängen

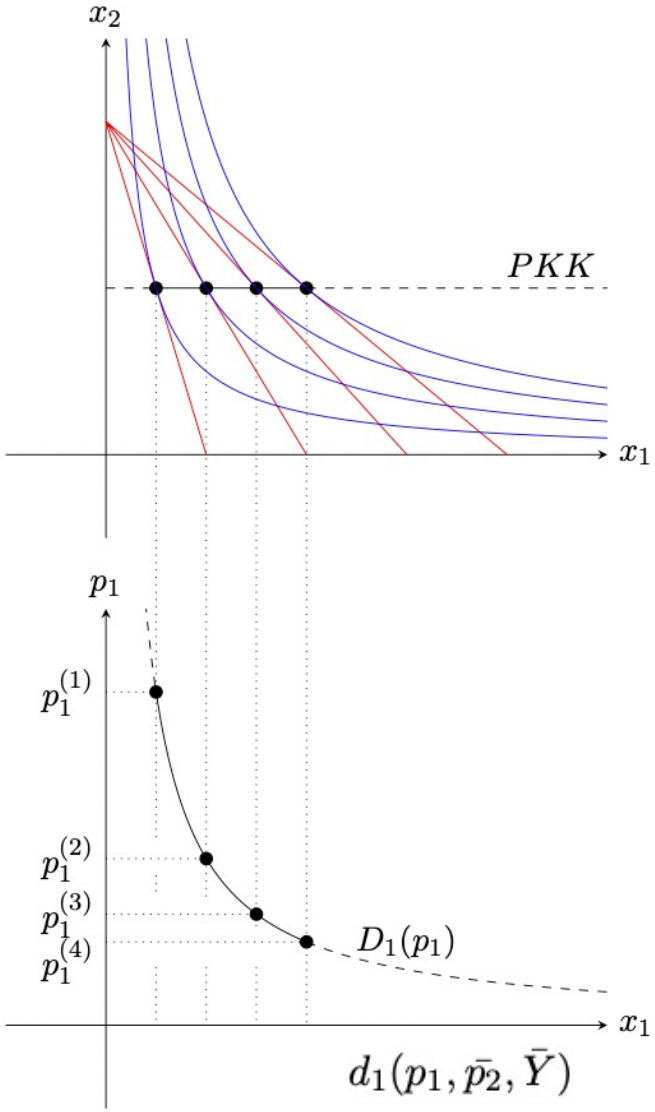
- **Frage:** Wie sieht die Engelkurve von quasilinearen Präferenzen aus?



1b) Nachfragekurve

- Nachfragekurve für Gut i
  - Halte alle Preise **außer p_i** konstant
  - Halte das Einkommen Y fest
  - Variiere Preis von Gut i p_i
  - → Notiere wie x_i^* sich ändert

- Der Verlauf der Nachfragekurve kann vom Wert der fixierten Preise und des fixierten Einkommen abhängen



1b) Einkommens- und Substitutionseffekt

- **Effekt einer Preisänderung** (bspw. Preiserhöhung) eines Gutes kann zerlegt werden in…
  - **Substitutionseffekt (SE):** Durch die relative Preisänderung konsumiere ich mehr von einem, Gut, das relativ günstiger wurde.
  - **Einkommenseffekt (EE):** Bei (bspw.) Preissenkung bin ich „effektiv reicher“ und habe mehr Einkommen für beide Güter

→ **Idee:** Definiere ein fiktives Einkommen Y‘, das den EE der Preisänderung kompensiert

$$\overbrace{d(p_1', p_2, Y)}^{C} - \overbrace{d(p_1, p_2, Y)}^{A} = GE \qquad \text{(Gesamteffekt)}$$

$$\underbrace{d(p_1', p_2, \overline{Y})}_{B} - d(p_1, p_2, Y) = SE \qquad \text{(Substitutionseffekt)}$$

$$d(p_1', p_2, Y) - \underbrace{d(p_1', p_2, \overline{Y})}_{B} = EE \qquad \text{(Einkommenseffekt)}$$

Bestimmung von $\overline{Y}$

- Hicks: $\overline{Y}$ so definieren, dass der Nutzen zum neuen Preis p_1‘ = Nutzen zu altem Preis p_1

$$\overline{Y}: \; u\Big(d(p_1', p_2, \overline{Y})\Big) \stackrel{!}{=} u\Big(d(p_1, p_2, Y)\Big)$$

1b) Hicks-Zerlegung

(Hicks-) Substitutionsseffekt

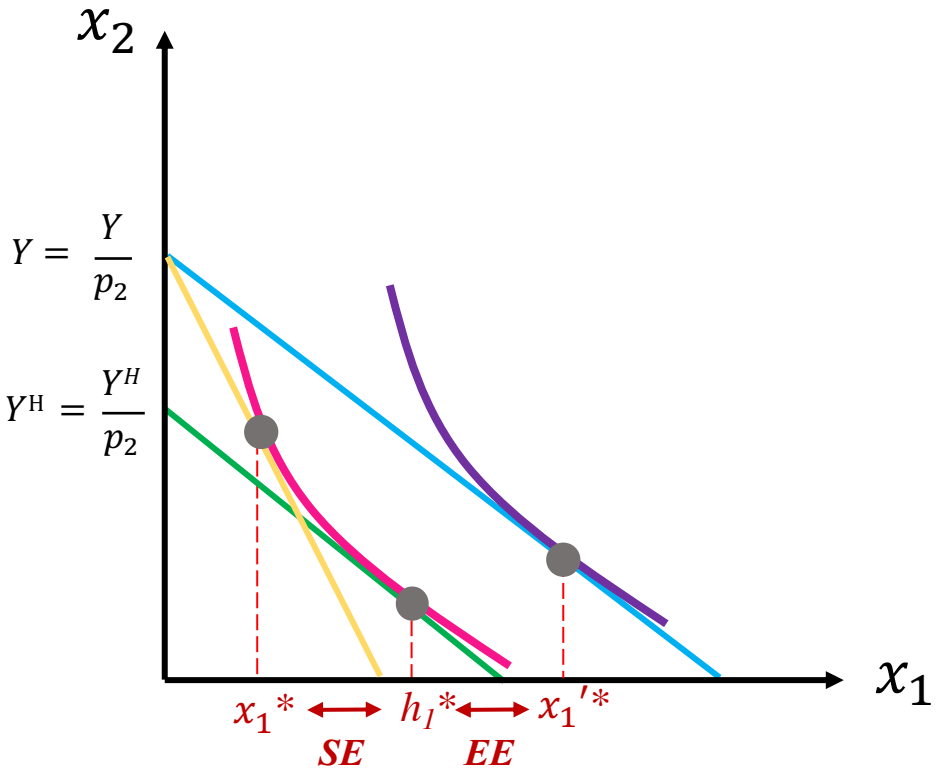
der Preisänderung von p_1 nach p_1':

$$h^* - x^* = d(p_1', p_2, Y^H) - d(p_1, p_2, Y)$$

(Hicks)-Einkommenseffekt

der Preisänderung von p_1 nach p_1`

$$x^{*\prime} - h^* = d(p_1', p_2, Y) - d(p_1', p_2, Y^H)$$



Budgetgerade mit ursprünglichem Preis

Budgetgerade mit geändertem Preis

Budgetgerade mit kompensierten Einkommen

Indifferenzkurve 1

Indifferenzkurve 2 (höheres Nutzenniveau)

1b) EE und SE für bestimmte Güterklassen

- ***Gesetz der Nachfrage****: Die nachgefragte Menge nach einem Gut i ist mit zunehmendem Preis p_i fallend.*
- Wenn der negative Einkommenseffekt den positiven Substitutionseffekt dominiert, ist das ***Gesetz der Nachfrage verletzt***.

Gut	Definition	Einkommens-effekt	Substitutions-effekt	Gesamteffekt
Normal	Einkommenseffekt ≥ 0	+	+	+
Inferior	Einkommenseffekt ≤ 0	-	+	unbestimmt
Giffen	Gesamteffekt ≤ 0	-	+	-

- Giffen Güter sind extrem inferior, so sehr dass |EE| > |SE|

1b) EE und SE: Arbeitsauftrag (10 Minuten)

- **gegeben:** $u(x_1, x_2) = (x_1)(x_2^2); Y = 30; p_1 = 1; p_2 = 2; p_1' = 2$
- **gesucht:** altes und neues Optimum, EE und SE, Hicks-kompensierte Einkommen $\bar{Y}$

1. **Altes Optimum:** $x_1^* = \frac{c}{c+d}\frac{Y}{p_1} = \frac{1}{3}\frac{30}{1} = 10;\ x_2^* = \frac{d}{c+d}\frac{Y}{p_2} = \frac{2}{3}\frac{30}{2} = 10 \Longrightarrow$ **(10,10)**
2. **Neues Optimum:** $x_1^{*N} = \frac{c}{c+d}\frac{Y}{p_1'} = \frac{1}{3}\frac{30}{2} = 5;\ x_2^{*N} = \frac{d}{c+d}\frac{Y}{p_2} = \frac{2}{3}\frac{30}{2} = 10 \Longrightarrow$ **(5,10)**
3. **Hick-kompensiertes Budget $\bar{Y}$**
   - *a)* $\bar{Y}: u\big(d(p_1', p_2, \bar{Y})\big) = u\big(d(p_1, p_2, Y)\big)$
   - *b)* $u\big(d(p_1, p_2, Y)\big) = (x_1^*)(x_2^*)^2 = 10 \times 10^2 = 1000$
   - *c)* $u\big(d(p_1', p_2, \bar{Y})\big) = (x_1^{*H})(x_2^{*H})^2 = \left(\frac{c}{c+d}\frac{\bar{Y}}{p_1'}\right)\left(\frac{d}{c+d}\frac{\bar{Y}}{p_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\frac{\bar{Y}}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\frac{\bar{Y}}{2}\right)^2 = \frac{\bar{Y}^3}{54}$
   - *d)* $\frac{\bar{Y}^3}{54} = 1000$ *also* $\boldsymbol{\bar{Y} = \sqrt[3]{54000} = 37,8}$
4. **„Hicks-Hilfs-Bündel“** $(x_1^{*H}; x_2^{*H}) = \left(\frac{c}{c+d}\frac{\bar{Y}}{p_1'}; \frac{d}{c+d}\frac{\bar{Y}}{p_2}\right) = \left(\frac{\bar{Y}}{6}; \frac{\bar{Y}}{3}\right) = (6.3; 12.8)$
5. **EE und SE**
   - **a)** $\mathbf{SE} = d(p_1', p_2, Y^H) - d(p_1, p_2, Y) = (6.3; 12.8) - (10; 10) = (\mathbf{-3.7; 2.8})$
   - **b)** $\mathbf{EE} = d(p_1', p_2, Y) - d(p_1', p_2, Y^H) = (5, 10) - (6.3; 12.8) = (\mathbf{-1.3; -2.8})$

1c) Freizeit-Konsum Modell

- Zwei Güter: Konsum C und Freizeit F
- Preis des Konsums auf p=1 normiert (= relativer) Stundenlohn: w
- Zeitbudget T fest gegeben, evtl. Grundkonsum $c_0 \geq 0$
- T ist aufzuteilen auf Arbeit n und Freizeit F → T = n + F

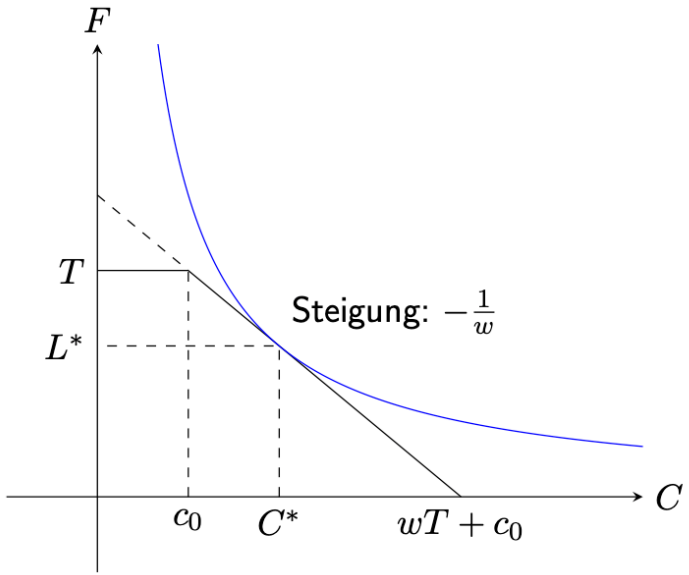
$$\max_{C,F} u(C,F) \; u.d.N. \; C = c_0 + wn$$

$$= c_0 + w(T - F)$$

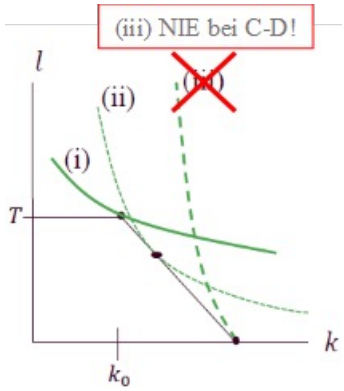
- Optimierungsbedingung

$$GRS_{C,F}(C,F) = -\frac{MU_C}{MU_F} = -\frac{\frac{\partial u(C,F)}{\partial C}}{\frac{\partial u(C,F)}{\partial F}} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{w}$$

1. Innere Lösung
2. $c = c_0$ → $GRS_{C,F} \geq -1/w$
3. $F = 0$ → $GRS_{C,F} \leq -1/w$



1c) Freizeit-Konsum-Modell: Altklausuraufgabe (15 Minuten)



1. Schritt: Ansatz für die Lösung im Inneren (am Knick) $\left[u(k,l) = kl^3\right]$

- $m_{IDK} = m_{BG} \iff GRS_{kl} = -\frac{p_{1=k}}{p_{2=l}}$
- $-\frac{\frac{\partial u}{\partial k}}{\frac{\partial u}{\partial l}} = -\frac{1}{w}$ ergibt hier: $-\frac{l^3}{3*k*l^2} = -\frac{1}{w}$

2. Schritt: Ausdrücke für *l (aus der Gleichung) und *k** (aus der Budgetbeschränkung)**

- $-\frac{l}{3*k} = -\frac{1}{w} \iff l = l^* = \frac{3k*}{w}$ UND $k^* = k_0 + wT - wl^*$

3. Schritt: Ineinander einsetzen (etwa *k in den Ausdruck für *l**)**

- $l^* = \frac{3k*}{w} = \frac{3(k_0 + wT - wl*)}{w} = \frac{3k_0}{w} + 3T - 3l^* \iff 4l^* = 3(\frac{k_0}{w} + T)$

4. Schritt: Auflösen nach *l und Einsetzen von *l** in *k** ergibt das optimale Bündel**

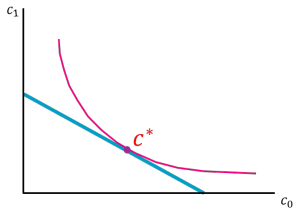
- $l^* = \frac{3}{4}(\frac{k_0}{w} + T)$ *und* $k^* = k_0 + wT - wl^*$

5. Schritt: Nachdenken, Ruhe bewahren, Frage beantworten

1d) Intertemporale Entscheidungen

- Konsumenten ziehen Nutzen aus dem Konsum c_t in den Perioden t=0 und t=1 und damit aus dem Güterbündel, bz. **Konsumstrom (c_0, c_1)**
- Konsumenten erhalten ein Einkommen Y_t in den Perioden t=0 und t=1, also ein **Einkommensstrom (Y_0, Y_1)**
- Perfekter Kapitalmarkt: **Zins r** mit dem zwischen zwei Perioden gespart und geliehen werden kann
- **Intertemporale Budgetrestriktion**:

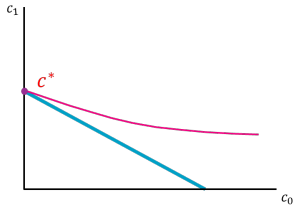
$$\underbrace{c_0 + \frac{1}{1+r}c_1}_{\text{Barwert Konsum}} \leq \underbrace{Y_0 + \frac{1}{1+r}Y_1}_{\text{Barwert Einkommen}}$$



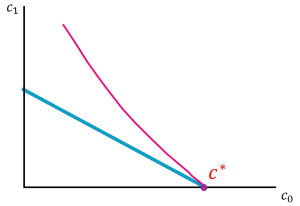
- **Optimierungsbedingung**

$$\max_{c_0,c_1} u(c_0, c_1)$$

$$\text{u.d.N. } c_0 + \frac{1}{1+r}c_1 = Y_0 + \frac{1}{1+r}Y_1, \quad c_0 \geq 0, \quad c_1 \geq 0$$

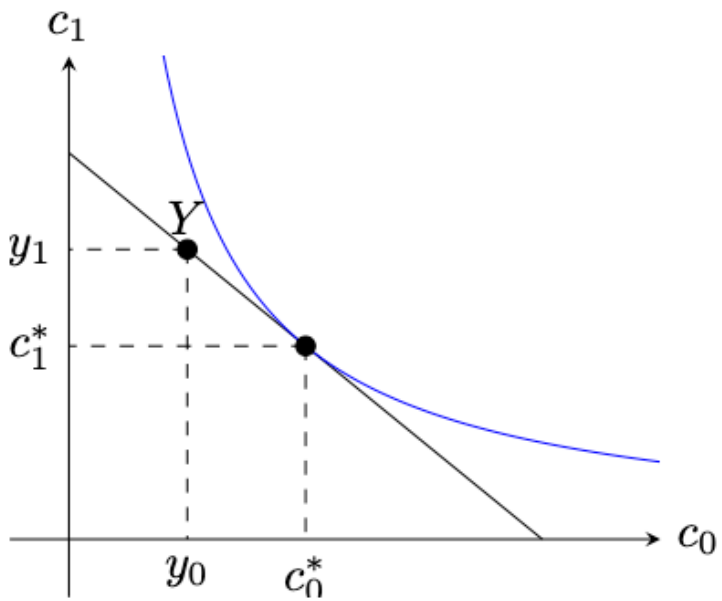


1. Inneres Optimum: $GRS(c_0^*, c_1^*) = -\frac{1}{\frac{1}{1+r}} = -(1+r) = -\frac{p_1}{p_2}$
2. $c_0^*=0 \rightarrow GRS(c_0^*, c_1^*) \geq -(1+r)$
3. $c_1^*=0 \rightarrow GRS(c_0^*, c_1^*) \leq -(1+r)$

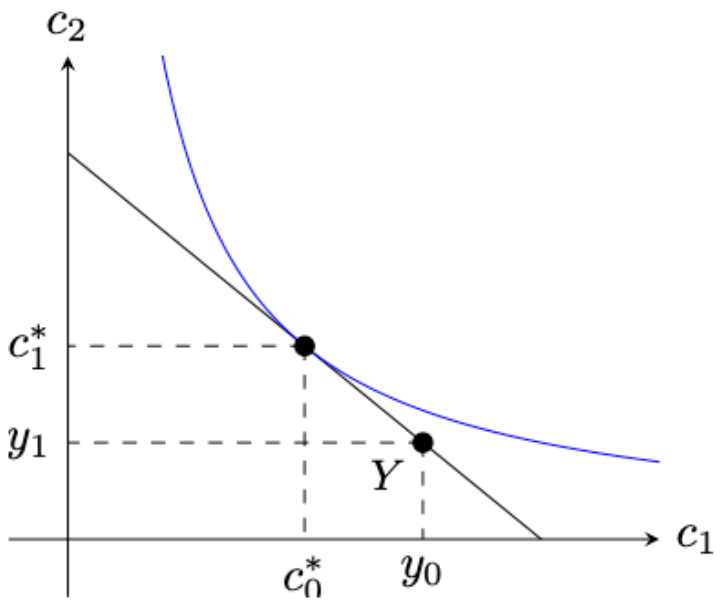


1d) Intertemporale Entscheidungen

Fall $c_0^* > y_0 \Longrightarrow$ Konsument nimmt Kredit von $c_0^* - y_0$ auf.



Fall $c_0^* < y_0 \Longrightarrow$ Konsument spart $y_0 - c_0^*$.



1d) Zinsänderung

- Zinsänderung bewirkt **Drehung der Budgetgerade** um (y_o, y_1)

- Beispiel: **Zinserhöhung** → 1/(1+r) sinkt – Aussagen zum künftigen Konsum
  - (Preis des heutigen Konsums steigt und) Preis des zukünftigen Konsums sinkt
  - **Sparer (= Kreditgeber)**
    - Einkommenseffekt *positiv*: Bekommt höhere Rückzahlung in der Zukunft, hat mehr Einkommen für Konsum in beiden Perioden
    - Substitutionseffekt *positiv*: Zukünftiger Konsum relativ attraktiver

    → Mehr Konsum in der Zukunft
  - **Kreditnehmer**
    - Einkommenseffekt *negativ*: Muss in der Zukunft mehr zurückzahlen, hat weniger Einkommen für Konsum in beiden Perioden
    - Substitutionseffekt *positiv*: Zukünftiger Konsum relativ attraktiver

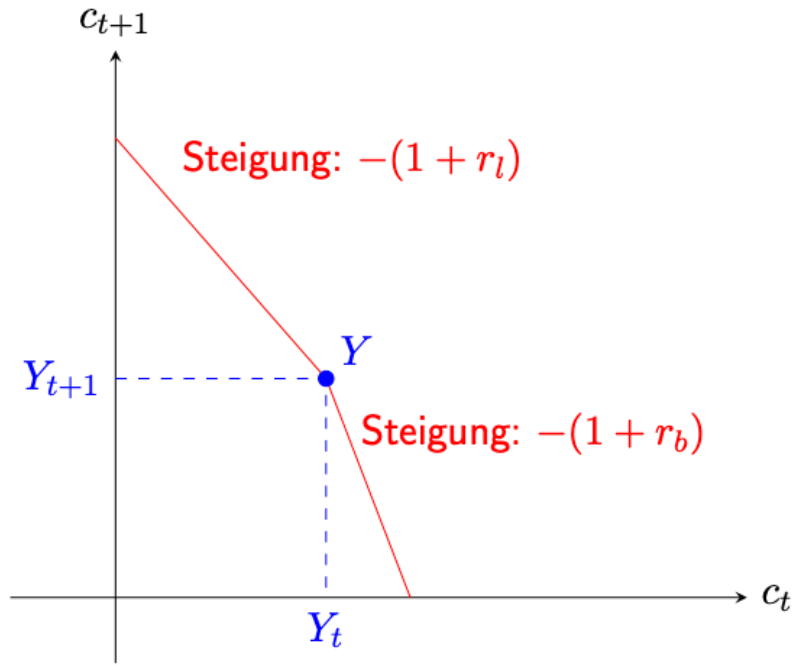
    → Änderung des zukünftigen Konsums unbestimmt

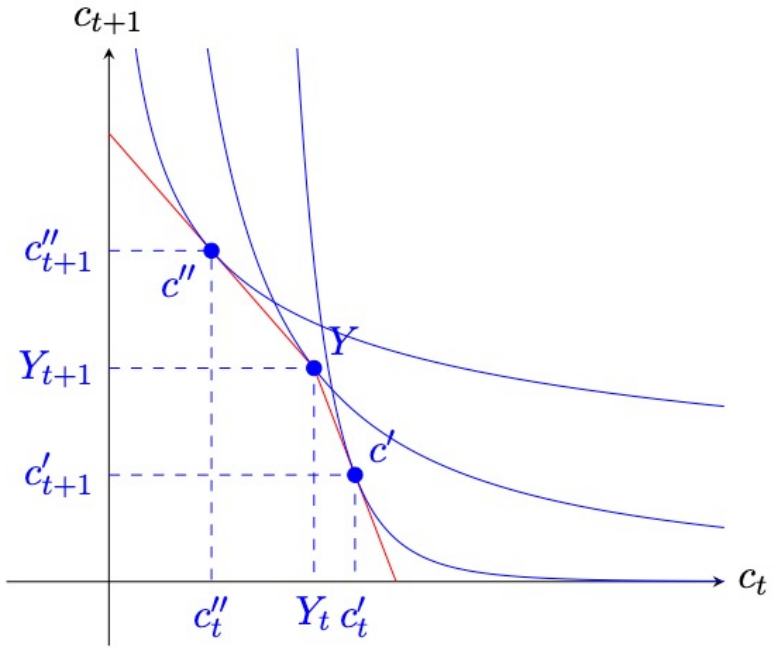
1d) Imperfekte Kapitalmärkte

- **Zinsspread**
  - Bekomme r_L auf Ersparnisse, aber zahle $r_B > r_L$ auf Kredite

  → Knick in Budgetgeraden bei (y_0, y_1)

- Lösung am Knick: $-(1+r_L) > GRS(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1) > -(1+r_B)$





2. Produzententheorie

Fragestellungen

- Wie maximieren wir den Firmengewinn?
  → **Gewinnmaximierung**

- Wie produzieren wir physisch?
  → **Produktion**

- Welche Kosten entstehen bei der Produktion und wie minimieren wir sie?
  → **Kosten**

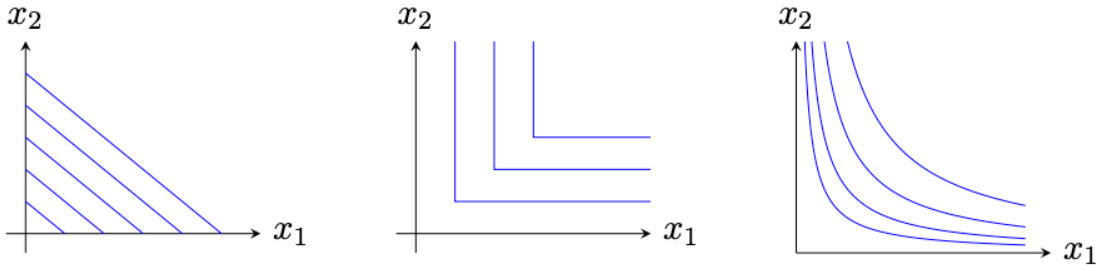
- Wie sieht die Produktionsentscheidung im Kontext des Wettbewerbsmarktes aus?
  → **Angebot**

Produktionsfunktionen

- **Produktionsfunktion f** ordnet einer Inputkombination (x_1, x_2, …) die damit maximal erreichbare Outputmenge q zu → f (x_1, x_2, …) = q
- Eine **Isoquante** zum Niveau q ist die Menge aller Inputkombinationen (x_1, x_2, …), die den gleichen Output erzielen

  → Höhenlinie der Produktionsfunktionen (Analog Indifferenzkurve auf Konsumentenseite)
- **Sinnvolle Eigenschaften**
  - f (x_1, x_2) ist in allen Variablen wachsend → schwach **fallende Isoquanten**
  - f (x_1, x_2) ist (quasi-)konkav → **Isoquanten** sind **konvex**, **Technologie ist konvex**
  - Unterschied zur Nutzenfunktion: Tatsächlicher Wert von q von Interesse, **Transformation** von f repräsentiert **nicht mehr** dieselbe Technologie (→ Skalenerträge)
- Beispiele: Perfekte Substitute Perfekte Komplemente Cobb-Douglas

$$f(x_1, x_2) = A(x_1 + x_2) \quad f(x_1, x_2) = A\min\{x_1, x_2\} \quad f(x_1, x_2) = Ax_1^c x_2^d$$



Produktionsfunktionen

- **Grenzprodukt/Grenzertrag von Input i:** Wie viele zusätzliche Einheiten Output produziere ich mit einer zusätzlichen marginalen Einheit von i?
- = Ableitung der Produktionsfunktion nach x_i

$$GP_i(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_i}$$

- **Gesetz der abnehmenden Grenzerträge =** Wenn eine Firma den Einsatz eines Inputs immer weiter ausdehnt und dabei den Einsatz des anderen Inputs konstant hält, dann wird der Grenzertrag des ausgeweiteten Inputs irgendwann abnehmen

- **Grenzrate der technischen Substitution**

  Wenn eine Einheit x_1 mehr eingesetzt wird, wie muss x_2 angepasst werden, um Output konstant zu halten? → Analog Grenzrate der Substitution

$$GRTS(x_1, x_2) - \frac{\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = -\frac{GP_1(x_1, x_2)}{GP_2(x_1, x_2)}$$

- **Skalenerträge? „**Wie verändert sich die Outputmenge, wenn ***alle*** Inputmengen gleichmäßig um einen Faktor $t > 1$ erhöht werden?“ Die Skalenerträge von f sind:

– steigend, wenn $f(tx_1, \dots, tx_I) > tf(x_1, \dots, x_I)$,
– abnehmend, wenn $f(tx_1, \dots, tx_I) < tf(x_1, \dots, x_I)$,
– konstant, wenn $f(tx_1, \dots, tx_I) = tf(x_1, \dots, x_I)$

Kosten

- **Ziel der Unternehmen:** Gewinn der Firma zu maximieren, wobei Gewinn = Erlös – Kosten
- eine **Kostenfunktion** gibt die *minimalen* Kosten $C_f(q)$ an, mit denen die Outputmenge q produziert werden kann
- **Ansatz für die Kostenfunktion**: die minimalen Kosten der Outputmenge q, $C_f(q)$, sind gleich dem Marktwert der Inputkombination, die gemäß der bedingten Faktornachfrage d gewählt wird, um q herzustellen
- **Wieso gemäß der bedingten Faktornachfrage?** Die bedingte Faktornachfrage beschreibt, welche Inputbündel *kostenminimierend* sind, als Funktion der Inputpreise und der Outputmenge q: $x^* = d(p_1, p_2, \dots, p_I, q)$

$$C_f(q) = p_1 d_1(p_1, p_2, \dots, p_I, q) + \cdots + p_I d_I(p_1, p_2, \dots, p_I, q)$$

- **Kostenminimierung**
  - Inputpreise ω1 und ω2
  - Es soll die Outputmenge q hergestellt werden

    → Kostenminimierende Inputkombination (x1*, x2*)

$$\min_{x_1, x_2} \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2$$

$$\text{u.d.N. } f(x_1, x_2) = q, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

- **Kostenfunktion** C liefert die zugehörigen minimalen Ausgaben, um q zu produzieren:

$$C(q) = \omega_1 x_1^* + \omega_2 x_2^*$$

Kostenarten

- **Grenzkosten**: GK (q) = C‘ (q)
- **Durchschnittskosten**: DK (q) = C(q) / q
- **Fixkosten**: FK = C (0)
- **Setup-Kosten**: SetupK = $\lim_{q \to 0}$ (C (q) – C (0))
- **Variable Kosten:** VK (q) = C (q) – FK
- **DVK:** DVK (q) = VK (q) / q

- **Betriebsoptimum oder effiziente Betriebsgröße** ist diejenige Outputmenge, welche **zu den kleinsten Durchschnittskosten** hergestellt werden kann – dies muss *nicht die optimale Outputmenge* sein*!* (das Betriebstotpimum ist eine reine Eigenschaft der **Kostenfunktion** und hat nichts mit dem ***Output*preis** zu tun, von dem aber die optimale Outputmenge abhängt)
- am Betriebsoptimum sind die Grenzkosten *immer* gleich den Durchschnittskosten $\boldsymbol{GK(\breve{q}) = DK(\breve{q})}$
- wir suchen also das Minimum der Durchschnittskosten-Funktion ***DK (q)*** = $\boldsymbol{C_f(q)/q}$
- die Sprunghöhe der Kosten-Funktion an der Stelle q = 0 nennen wir **Setup-Kosten**, dies sind die Kosten, die unvermeidbar sind, damit überhaupt Output (egal wie wenig) produziert werden kann

Setup- und Fixkosten

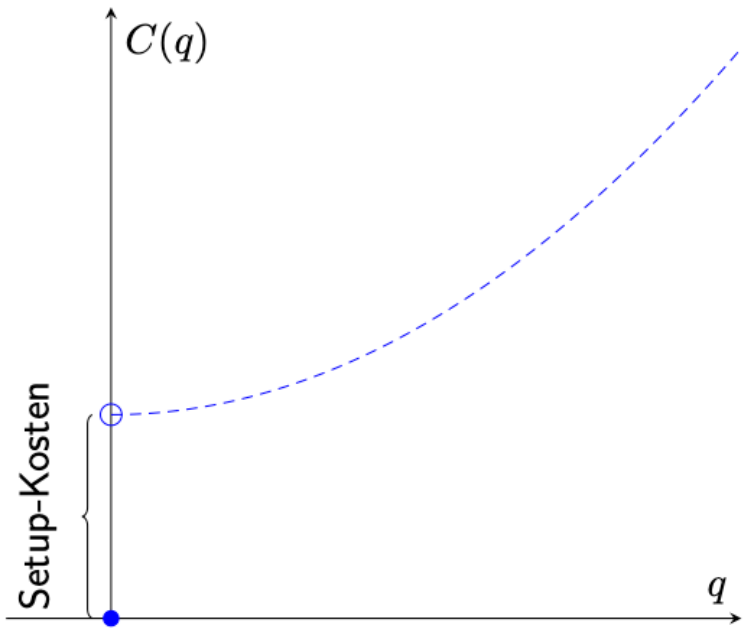


Abbildung: positive Setupkosten, keine Fixkosten

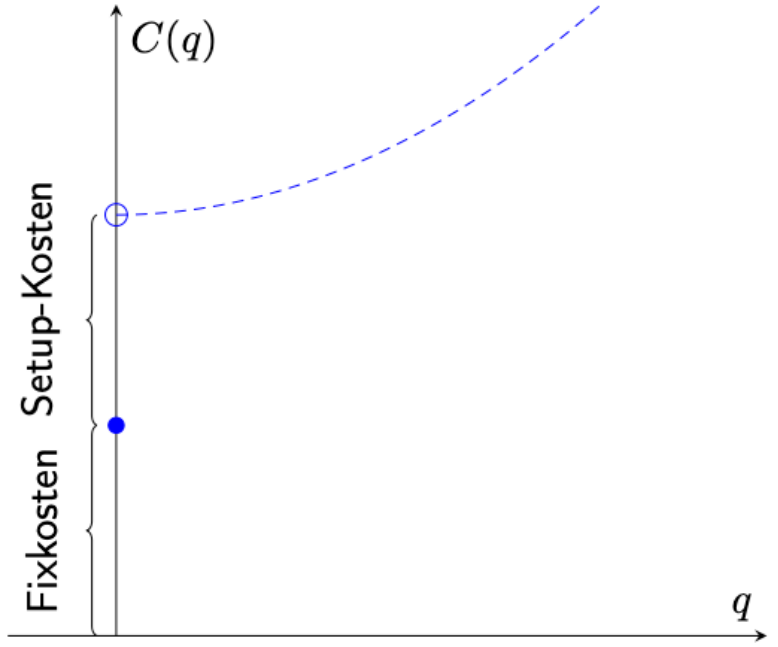
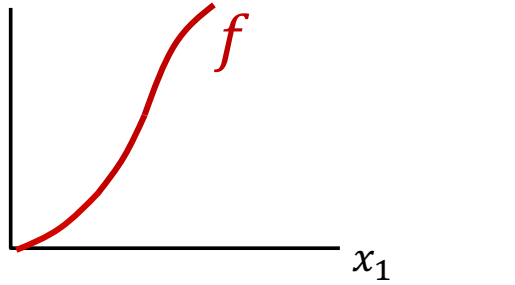


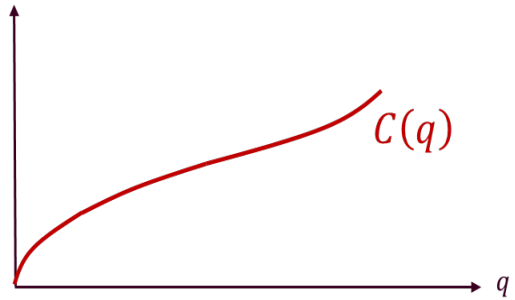
Abbildung: positive Setupksoten, positive Fixkosten

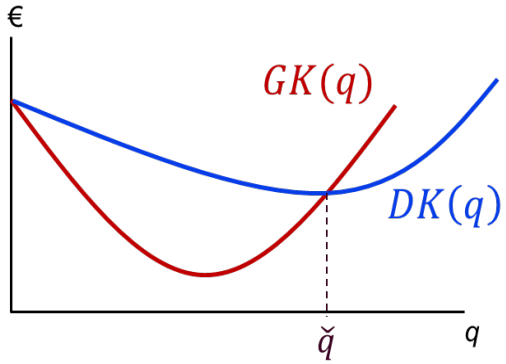
Verlauf von Produktions- und Kostenfunktionen

- **Der Zusammenhang zwischen den Skalenerträgen und den Durchschnittskosten**
- der Verlauf der DK hängt von den Skalenerträgen der Produktionsfunktion f ab:
  - wo die Skalenerträge der f **zunehmend** sind, ist die DKK strikt fallend
  - wo die Skalenerträge der f **abnehmend** sind, ist die DKK strikt wachsend
  - wo die Skalenerträge der f **konstant** sind, ist auch die DKK konstant

- **Produktionstechnologien mit nur 1 Input:**
  - in dem Bereich wo das **Grenzprodukt wachsend** ist, ist die **Produktionsfunktion** f immer **steiler** (ihre inverse **Kostenfunktion** C_f daher immer **flacher**); in dem Bereich wo das **Grenzprodukt fallend** ist, ist die **Produktionsfunktion** f immer **flacher** (ihre inverse **Kostenfunktion** C_f daher immer **steiler**)
  - Wenn das **Grenzprodukt** des Inputs in einem Bereich **steigend** ist, dann sind die **Grenzkosten** in diesem Bereich **fallend**; wenn das **Grenzprodukt** des Inputs in einem Bereich **fallend** ist, dann sind die **Grenzkosten** in diesem Bereich **steigend**.
  - Wenn bei einer Outputmenge q die **Grenzkosten unter den Durchschnittskosten** liegen, dann **senkt** die Herstellung einer zusätzlichen Einheit die **Durchschnittskosten**; wenn bei einer Outputmenge q die **Grenzkosten über den Durchschnitts-kosten** liegen, dann **hebt** die Herstellung einer zusätzlichen Einheit die **Durchschnittskosten**







Berechnung bedingter (kostenminimierender) Faktornachfrage

- **Substitute:** $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$:

$$(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} (0, \frac{q}{b}) & \frac{a}{b} < \frac{\omega_1}{\omega_2} \\ (\frac{q}{a}, 0) & \frac{a}{b} > \frac{\omega_1}{\omega_2} \end{cases}$$

- **Komplemente**: $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$:

$ax_1^* = bx_2^* \implies$ in Nebenbedingung einsetzen ...

- **Cobb-Douglas oder andere:**
  1. Bedingung erster Ordnung nach x_2 umstellen: $GRTS(x_1^*, x_2^*) \stackrel{!}{=} -\frac{w_1}{w_2} \implies x_2^*(x_1^*)$
  2. In Nebenbedingung einsetzen: $f(x_1^*, x_2^*) = f(x_1^*, x_2^*(x_1^*)) \stackrel{!}{=} q$

$$\implies \begin{cases} x_1^* \\ x_2^* \end{cases} \implies C(q) = p_1 x_1^* + p_2 x_2^*$$

Arbeitsauftrag: Kostenfunktion zur f mit nur einem Input x_1

Kostenfunktion zur Produktionsfunktion $f(x_1) = \sqrt{x_1 - 4}$ **?**

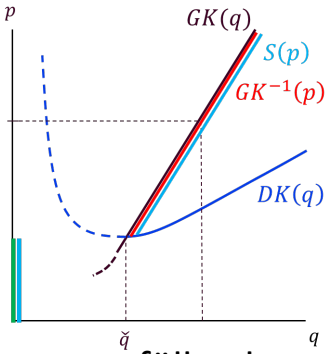
- Unterscheidung von 2 Fällen: **Fall 1: $q = 0$** ⇒ wenn die Outputmenge q = 0 (also nix, etwa bei zu kleinem Outputpreis) hergestellt werden soll, wird kein Input benötigt, also gilt $C_f(0) = 0$
- **Fall 2: $q > 0$** ⇒ wenn eine Outputmenge q > 0 hergestellt werden soll, dann gibt es (weil f strikt wachsend ist) eine eindeutige Inputmenge, die dazu ausreicht.
- wenn wir wissen, dass **mit Inputmenge x_1** die **Outputmenge $f(x_1) = q = \sqrt{x_1 - 4}$ hergestellt** wird (= wie die hergestellte Menge **q von** der Inputmenge **x_1 abhängt**), welche Funktion verrät uns, **wie viel Einheiten an Input 1 x_1 für die Herstellung von q Einheiten benötigt** werden (wie die einzusetzende Menge x1 von der geplanten Outputmenge q abhängt)?

➢ Die **inverse Produktionsfunktion** $\boldsymbol{f^{-1}(q) = x_1}$

- also $\sqrt{x_1 - 4} = q$ wollen wir nach x_1 auflösen, damit nicht q von x_1, sondern x_1 von q abhängt
- $\sqrt{x_1 - 4} = q$ nach x1 aufgelöst ergibt: $x_1 = q^2 + 4$
- die Kostenfunktion heißt daher: $C_f(q) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{falls } q = 0 \\ \boldsymbol{p_1 x_1 = p_1 (q^2 + 4)} & \text{falls } q > 0 \end{cases}$

Die Angebotsfunktion

$$\max_{q \geq 0} \pi = pq - C(q)$$



- **Gewinn** = Erlös – Kosten = $q^*p - K(q^*) = q^*p - q^*DK(q^*) = S(p)[p - DK(S(p))]$
- **Angebotsfunktion**: $S(p) = \begin{cases} GK^{-1}(p), & falls\ p \geq DK(\breve{q}) \\ 0, & falls\ p \leq DK(\breve{q}) \end{cases}$
- **das Gesetz des Angebots:** Angebotskurven (also GKK) sind schwach steigend; wenn erfüllt, dann folgt das Angebot dem Verlauf der (inversen) Grenzkostenkurve (im Diagramm die gleiche Kurve!)
- **für eine innere Lösung $q^* > 0$ gilt** $q^* \geq \breve{q}$ & $p = GK(q^*)$: «Falls überhaupt etwas hergestellt wird, dann wird mindestens das Betriebsoptimum hergestellt» & «Falls überhaupt etwas hergestellt wird, dann soviel, dass die Grenzkosten (der letzten hergestellten Einheit) gleich dem Outputpreis sind»
- **Herleitung der Angebotsfunktion:**
- **1. Schritt: Wann (bis zu welchem Outputpreis) wird nichts produziert? solange $p < DK(\breve{q})$**
  - finde die DK=K/q & Minimum der DK = $DK(\breve{q})$ z.B. über $GK(\breve{q}) = DK(\breve{q})$, bis zu diesem *p: q=0*
- **2. Schritt: Wie viel wird bei *p = DK ($\breve{q}$)* produziert? 0 oder das Betriebsoptimum $\breve{q}$ ($\pi = 0$)**
  - **π bei $\breve{q}$**: $p\breve{q} - K(\breve{q}) = p\breve{q} - \breve{q}DK(\breve{q}) = \breve{q}(p - DK(\breve{q})) = \breve{q}(DK(\breve{q}) - DK(\breve{q})) = 0 = \pi$ **bei q = 0**
- **3. Schritt: Wie viel wird bei p > DK ($\breve{q}$) produziert? S(p) = $GK^{-1}(p)$ (Inverse der GK)**
  - GK herleiten, gleich p setzen, GK(q) = p, den Ausdruck nach q auflösen, liefert S(p) = $\mathrm{GK}^{-1}(\mathrm{p})$

Marktangebot bei freiem Markteintritt

- Das **Gesamtangebot von *m* Firmen** in einem Markt

$$S(p) = \sum_{j=1}^{m} S_j(p)$$

- **Bei homogener Technologie und Möglichkeit des freien Markteintritts…**
  - treten Firmen ein, bis der GG-Preis so weit gesunken ist, dass **alle Firmen Nullgewinne** machen: $\pi_i = 0 \rightarrow p^* = DK(q_i^*)$
  - produzieren alle Firmen **am Betriebsoptimum: $q_i^* = \check{q}$**
  - ist das **Marktangebot komplett elastisch**

Herleitung der Angebotsfunktion – Übersicht

Herleitung der Angebotsfunktion

1. notwendige Bedingung für eine Randlösung:

$$p \overset{!}{<} DK(\check{q})$$

2. notwendige Bedingung für eine innere Lösung:

$$p \overset{!}{\geq} DK(\check{q}) \ \wedge GK(q) \overset{!}{=} p$$

3. Zusammenfügen:

$$S(p) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } p \leq DK(\check{q}) \\ GK^{-1}(p) & \text{, falls } p \geq DK(\check{q}) \end{cases}$$

Arbeitsauftrag: Kostenfunktion zur f mit nur einem Input x_1

Angebotsfunktion zur Produktionsfunktion $f(x_1) = \sqrt{x_1 - 4}, wenn\ p_1 = 1$ **?**

1. Schritt: Wann (bis zu welchem Outputpreis) wird nichts produziert? solange $p < DK(\check{q})$

- was ist *DK (q̌)* hier? *DK (q)* = $\frac{C_f(q)}{q} = \frac{\boldsymbol{p_1}\,(\boldsymbol{q^2+4})}{q} = q + \frac{4}{q}$
- Minimum der DK = $DK(\check{q})$ über $GK(\check{q}) = DK(\check{q})$: 2q = $q + \frac{4}{q}$ ⇒ $q^2 = 4$ ⇒ $\check{q} = 2$
- bei $\check{q} = 2$ gilt ***DK (q̌=2)*** = $q + \frac{4}{q} = 2 + \frac{4}{2} = \mathbf{4}$
- solange ***p* < 4**, wird wegen zu geringem Preis nichts produziert

2. Schritt: Wie viel wird bei *p = DK (q̌)* (= 4) produziert?

- $\check{q} = 2$ oder 0 da beides den Gewinn 0 liefert, $\pi = q(p - DK(\check{q})) = \check{q}(DK(\check{q}) - DK(\check{q})) = \mathbf{0}$

3. Schritt: Wie viel wird bei *p > DK (q̌)* produziert?

- $GK(q) = 2q$ dies in q steigend => Gesetz des Angebots erfüllt => $S(p) = GK^{-1}(p)$
- für jeden Outputpreis *p > DK (q̌) also p > 4* wird ***S(p) =*** $\boldsymbol{GK^{-1}(p)} > 0$ produziert
- da GK (q) = 2q = p ist $\boldsymbol{GK^{-1}(p) = q = p/2}$ also ***S(p) = p/2*** $(\boldsymbol{q^* \geq \check{q}})$

Arbeitsauftrag: Kostenfunktion zur f mit nur einem Input x_1

Angebotsfunktion zur Produktionsfunktion $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, *wenn* $p_1 = p_2 = 2$**?**

1. Schritt: Wann (bis zu welchem Outputpreis) wird nichts produziert? solange $p < DK(\breve{q})$

- was ist *DK (q̆)* hier? $DK\,(q) = \frac{C_f(q)}{q} = \frac{4q^{1/2}}{q} = 4\,q^{-1/2} = \frac{4}{\sqrt{q}}$
- diese Funktion ist fallend in q und hat ihr Minimum bei $q = \infty$, daher $\breve{q} = \infty$ mit $DK\,(\breve{q}) = 0$
- da $\boldsymbol{p < 0}$ nicht möglich, gibt es den Fall der Nichtproduktion wegen zu geringem Preis nicht

2. Schritt: Wie viel wird bei $\boldsymbol{p = DK\,(\breve{q})\,(= 0)}$ **produziert?**

- $\breve{q} = \infty$ oder 0 da beides den Gewinn 0 liefert, $\pi = q(p - DK(\breve{q})) = \breve{q}(DK(\breve{q}) - DK(\breve{q})) = \mathbf{0}$

3. Schritt: Wie viel wird bei $\boldsymbol{p > DK\,(\breve{q})}$ **produziert?**

- für jeden Outpreis $p > DK\,(\breve{q})$ *also* $p > 0$ wird $\boldsymbol{S(p) = GK^{-1}(p)} > 0$ produziert
- $GK(q) = 2\,q^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{q}}$ dies in q fallend!!! => $S(p) \neq GK^{-1}(p)$
- das Gesetz des Angebots ist nicht erfüllt, das Angebot folgt nicht dem Verlauf der GKK – *nun?*
- da $\pi = q(p - DK(q))$ und dieser Ausdruck in q steigend (DK(q) ja in q fallend, so dass von p bei immer größerer Menge immer weniger abgezogen wird), ergibt sich $\boldsymbol{S(p) = \infty}$

3. Gleichgewichtstheorie

- Partielles Gleichgewicht
- Wohlfahrt
- Tauschökonomie

❖ Motivation

- oft ist man in der VWL an der **Allokation** in einer Ökonomie interessiert (Güterbündel aller Individuen, produzierte Outputmengen und Gewinne aller Firmen…)
- die vollständige Analyse einer Ökonomie mit vielen verschiedenen Gütern, Konsumentenpräferenzen und Firmen ist jedoch oft zu **schwierig**. Deshalb **reduziert** man oft eine komplexe Ökonomie zu einer **quasilinearen Ökonomie** und analysiert nur diese; dies nennt man „**partielle Gleichgewichtsanalyse**“. Für diese spezielle Klasse von Ökonomien ist die **mathematische Berechnung der Wettbewerbsgleichgewichte** machbar.

❖ Konzept

- eine *quasilineare Ökonomie* ist also meist ein **stark vereinfachtes Modell** einer sehr viel komplexeren Realität
- dadurch gekennzeichnet, dass alle **Individuen** $i = 1,...,N$ **quasilineare Präferenzen** haben. Wir stellen die Präferenzen von Individuum i mit der Geldäquivalent-Nutzenfunktion dar: $u^i(x^i, m^i) = v^i(x^i) + m^i$. Erstausstattung der Individuen: $e^i = (0,\ \underline{m}^i + \sum_{j=1}^{M} s^{ij}\pi^j)$;
- Jede **Firma** $j = 1,\ldots,M$ hat eine **Produktionsfunktion** f_j , welche Gut 2 (Geld, m) als **Input** hat und Gut 1 als **Output**. In Wirklichkeit benutzt die Firma einige der Güter, die als Gut 2 zusammengefasst sind, als Inputs.

Partielles Gleichgewicht

- **Quasilineare Ökonomien**
  - N Konsumenten 1, …, N
  - M Firmen 1, …, M
  - I = 2 Güter
    - **Gut 1: homogenes Firmenprodukt**
      - Menge x_i: Konsummenge eines Individuums von Gut 1
      - Menge q_j: Produktionsmenge einer Firma von Gut 1
    - **Gut 2: Geld, wie auch von Firmen als Input genutzt;**
      - Menge m;
      - Preis normalisiert zu 1
  - **Präferenzen von Individuum i: monoton, quasilinear**
    $u^i(x^i, m^i) = \nu^i(x^i) + m^i$
  - **Produktionsfunktion für Firma j: $q^j = f^j(m)$**

  → Kostenfunktion $C^j(q^j) = (f^j)^{-1}(q^j)$
  - **Gewinn von Firma j: $\pi^j = p*q^j - C^j(q^j)$**
    - Individuum i ist Anteilseigner an Firma j mit Anteil $s^{ij} \geq 0$

Step by step: Berechnung des Marktgleichgewichts

1. **Nutzenmaximierung der einzelnen Konsumenten in Abhängigkeit von p***
   – Nachfrage $D^i(p)$ als Inverse der marginalen Zahlungsbereitschaft $((v^i)')^{-1}(p)$

$$D^i(p^*) = x^{i*}(p^*)$$

2. **Gewinnmaximierung der einzelnen Firmen in Abhängigkeit von p***
   – Angebot $S^j(p)$ als $GK^{-1}(p)$

$$S^j(p^*) = q^{j*}(p^*)$$

3. **Markträumung für Gut 1 $D(p) = S(p) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} x^i = \sum_{j=1}^{M} q^j$**
   – es ergibt sich p^*

4. **Nachfrage x^{i*} und Angebot q^{j*} von Gut 1 mit nunmehr bekanntem p* eindeutig bestimmt**

5. **Markträumung für Gut 2 folgt automatisch ($\sum_{i=1}^{N} m^{*i} + \sum_{j=1}^{M} C^j(q^{*j}) = \sum_{i=1}^{N} \underline{m}^i$)**
   a) **Profit π^j** jeder Firma ausrechnen: Gewinn = Erlös – Ko
   b) **m^{i*}** ausrechnen: $\sum_{i=1}^{N} m^{*i} = \sum_{i=1}^{N} \underline{m}^i - \sum_{j=1}^{M} C^j(q^{*j})$ bzw. $m^{*i} = \underline{m}^i + \sum_{j=1}^{M} s^{ij}\pi^j - p^* x^{*i}$

6. **Beachte:**
   a) Erstausstattung der Individuen: $e^i = (0,\ \underline{m}^i + \sum_{j=1}^{M} s^{ij}\pi^j)$;
   b) ALLOKATION: $(x^i, m^i)_{i=1,\dots,N}$, $(q^j)_{j=1,\dots,M}$

Steuern in quasilinearen Ökonomien

- Gegeben das Gesamtangebot S(p) und die Gesamtnachfrage D(p) in einem Markt ergibt sich **normalerweise ein Gleichgewichtspreis p*** → D(p*) = S(p*)

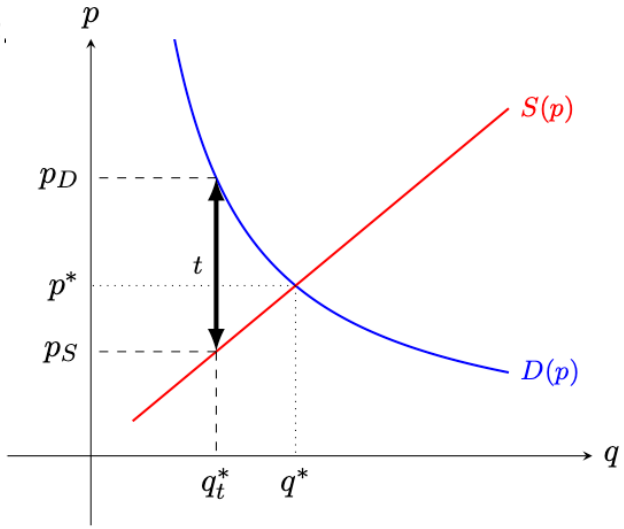
- **Sonderfall: Steuern**
  - p_D: Preis den die Konsumenten für ein Gut zahlen müssen
  - p_S: Preis den die Produzenten für ein Gut erhalten
  - $p_D = p_S + t$

  → **Neue Gleichgewichtsbedingung:**

  $S(p_D^* - t) = D(p_D^*)$ bzw. $S(p_S^*) = D(p_S^* + t)$

  - Umstellen → $p_D^* = p(t)$ und $p_S^* = p(t) - t$
  - Neue optimale Menge $q_t^* = D(p_D^*) = S(p_S^*)$

  - Es ist **egal, auf welcher Seite** die Steuer erhoben wird
  - **Steuereinnahmen**: $T = t\ S(p_S\text{^}*) = t\ D(p_D\text{^}*)$
  - Je weniger elastisch (relativ zur anderen Seite) eine Marktseite ist, desto mehr bekommt sie übergewälzt von jeder Steueränderung (**STEUERINZIDENZ**)



Elastizitäten

- **Elastizität** ist ein Maß dafür, wie stark der Wert einer Funktion auf die Veränderung eines Argumentes reagiert
- Bereiche der Funktion, wo der (Absolut-)Betrag der Elastizität
  - 0 ist, heißen vollkommen (oder perfekt) inelastisch,
  - zwischen 0 und 1 liegt, heißen inelastisch,
  - 1 ist, heißen einheitselastisch,
  - größer als 1 ist, heißen elastisch,
  - ∞ ist, heißen vollkommen (oder perfekt) elastisch.
- Eine quasilineare Ökonomie hat ***konstante*** Elastizitäten, wenn es Parameter $A_D > 0$, $A_S > 0$, $\hat{\varepsilon} \leq 0$ und $\hat{\eta} \geq 0$ gibt, so dass die Marktnachfrage die Form $D(p) = A_D p^{\hat{\varepsilon}}$ und das Marktangebot die Form $S(p) = A_S p^{\hat{\eta}}$ hat

Illustration: Nachfrage $D(p) = A_D p^{\hat{\varepsilon}}$

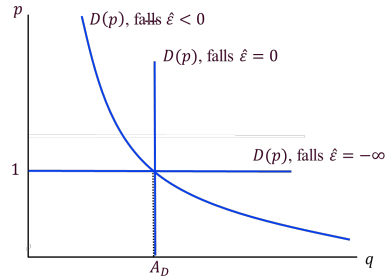
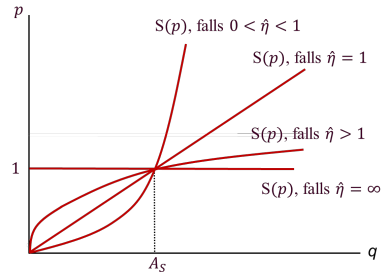


Illustration: Angebot $S(p) = A_S p^{\hat{\eta}}$



$$\epsilon(p) = D'(p)\frac{p}{D(p)} = A_D\hat{\epsilon}p^{\hat{\epsilon}-1}\frac{p}{A_D p^{\hat{\epsilon}}} = \hat{\epsilon}. \qquad \eta(p) = S'(p)\frac{p}{S(p)} = A_S\hat{\eta}p^{\hat{\eta}-1}\frac{p}{A_S p^{\hat{\eta}}} = \hat{\eta}.$$

Preisverzerrungsformel

- **Welche Seite trägt die Steuerlast?**

  → Abhängig von den Elastizitäten der Angebots-/Nachfragekurven

$$p'(t) = \frac{\eta(p_S^*)}{\eta(p_S^*) - \varepsilon(p_D^*)\frac{p_S^*}{p_D^*}}$$

, wobei $p_D^* = p(t)$ und $p_S^* = p(t) - t$

- **Erkennbar: Die relativ inelastische Seite trägt die Steuerlast**
  - Bsp.: Setze $\eta = 0$ (Vollkommen inelastisch)

  → $p'(t) = 0$ (= Konsumenten tragen keine Steuerlast)

- **Ausgehend von Situation ohne Steuern: $p_D^* = p_S^* = p(0) = p^*$**
  - $p(t)$ kann approximiert werden: $p(t) \approx p^* + p'(0) \cdot t$
  - (Approximation: es gibt meistens einen Schätzfehler)

Wohlfahrt

- **Pareto-Effizienz**
  - **Eine Allokation ist Pareto-effizient, wenn es nicht möglich ist, ein Individuum besser zu stellen ohne ein anderes schlechter zu stellen.**

- **Wohlfahrtssätze**
  1. Betrachtet man eine beliebige Anzahl von Wettbewerbsmärkten einschließlich Wechselwirkungen, wobei die Konsumenten beliebige lokal nichtgesättigte Präferenzen und die Firmen beliebige Technologien haben, **dann ist die Allokation, die aus dem Wettbewerbsgleichgewicht in allen Märkten entsteht, Pareto-effizient.**
     - *kurz: In jeder Tauschökonomie sind die Wettbewerbsallokationen Pareto-effizient*
  2. **Jede Pareto-effiziente Allokation ist durch Umverteilen der Erstausstattungen erreichbar.**
     - bzw.: In jeder Tauschökonomie, in der die Präferenzrelationen konvex sind, kann jede Pareto-effiziente Allokation als Wettbewerbs-Gleichgewicht erreicht werden, wenn die Erst-ausstattungen zuerst geeignet umverteilt werden

Produzenten- und Konsumentenrente

- **Konsumentenrente**
  - Fläche unterhalb der Nachfragekurve und oberhalb der Preislinie

$$KR = \int_0^{x_i^*} D_i^{-1}(q)dq - px_i^* = \int_p^{\infty} D(p)dp$$

  - KR = ZBS – p * x_i* (ZBS – tatsächlich gezahlter Preis)

- **Produzentenrente**
  - Fläche unterhalb der Preislinie und oberhalb der Angebotskurve

$$PR = pq^* - \int_0^{q^*} S^{-1}(q)dq$$

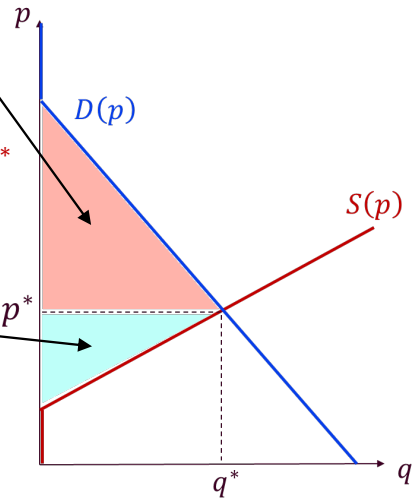
  - PR = Erlös – Insgesamt angefallene Kosten

$$KR = \int_{p^*}^{\infty} D(p)dp$$

$$= \int_0^{q*} (v^i)'(q)dq - p^* q^*$$

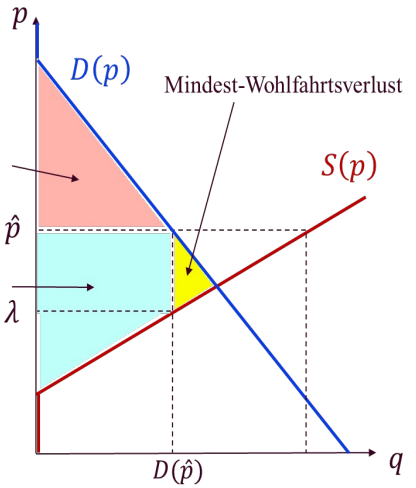
$$PR = \int_0^{p^*} S(p)dp$$

$$= p^* q^{*j} - \check{q}^j DK^j(\check{q}^j) - \int_{\check{q}^j}^{q^{*j}} (C^j)'(q)dq$$



$$KR = \int_{\hat{p}}^{\infty} D(p)dp$$

$$PR \leq \int_0^{\lambda} S(p)dp + D(\hat{p})(\hat{p} - \lambda)$$



Wohlfahrt

- Wohlfahrt = Produzentenrente + Konsumentenrente (+ Steuern)
- Im Marktgleichgewicht bei vollständigem Wettbewerb ist die Wohlfahrt maximal (1. Wohlfahrtssatz)

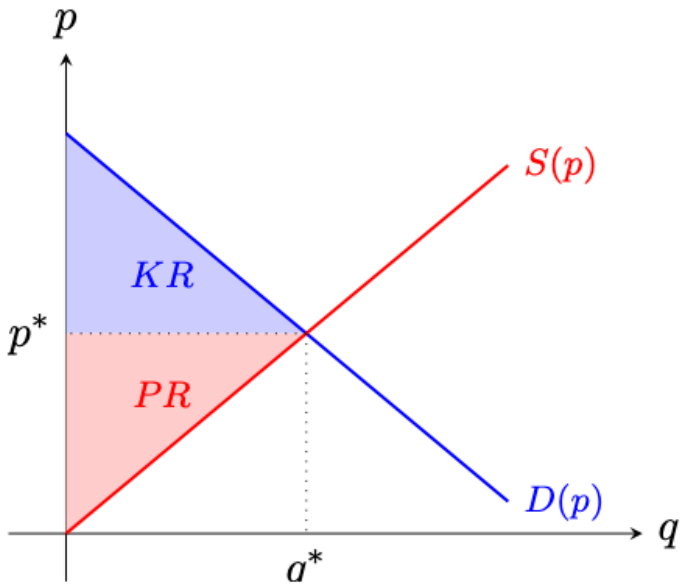


Abbildung: Wohlfahrt ohne Steuern: $KR + PR$

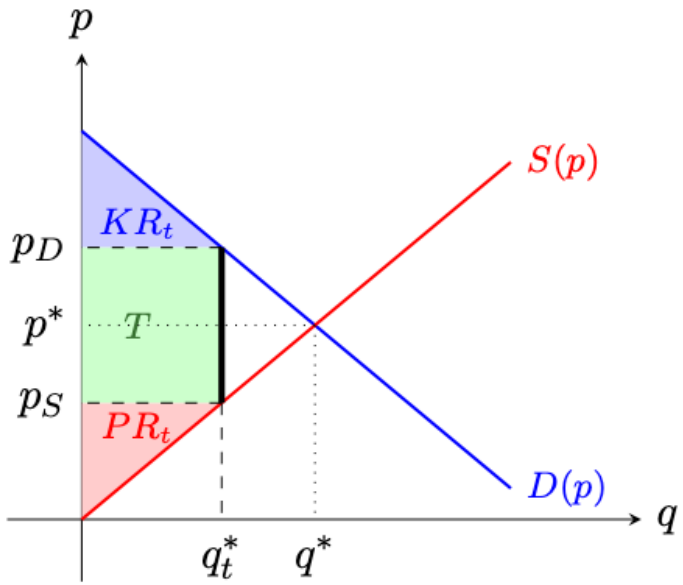


Abbildung: Wohlfahrt mit Steuer t: $KR_t + PR_t + T$

Tauschökonomie

- **Framework**
  - Beschreibt Gleichgewicht auf allen Märkten
  - Reine Tauschökonomie → Konsumenten können ihr Anfangsausstattungen eintauschen, aber nicht produzieren
  - Zwei Güter x_1, x_2
  - Zwei (Gruppen von Konsumenten): A und B mit den jeweiligen…
    - Anfangsausstattungen: $e_1^A, e_2^A, e_1^B, e_2^B$
    - Nutzenfunktionen: $u^A(x_1^A, x_2^A), u^B(x_1^B, x_2^B)$
  - Welt ist beschrieben durch Gesamtausstattung:

$$\overline{e_1} = e_1^A + e_1^B \qquad \overline{e_2} = e_2^A + e_2^B$$

→ **Darstellung in der Edgeworth-Box**

Edgeworth-Box

- Ist eine **bessere Verteilung** der Güter als die Anfangsausstattung **möglich?**
- Wenn ja, **durch welche Tauschrate** ist eine Pareto-effiziente Allokation erreichbar**?**

- **Pareto-effiziente Allokation** = Es ist nicht möglich, beide Parteien schwach besser zustellen. Im Inneren der Edgeworth-Box müssen Indifferenzkurven dort tangential sein.

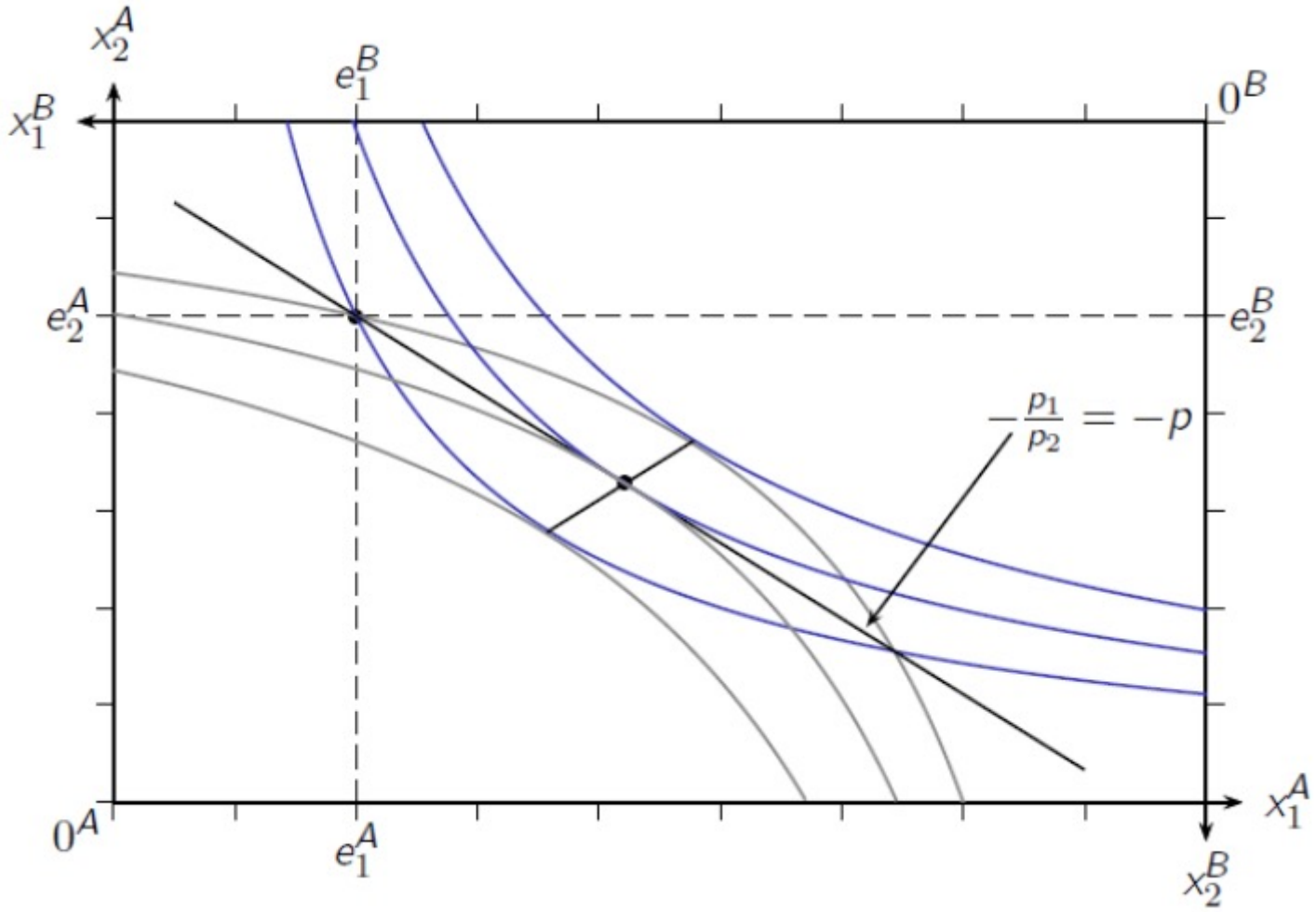
- **Kontrakt-Kurve:** Alle Allokationen, die
  1. Pareto-effizient sind **und**
  2. Beide Gruppen schwach gegenüber der Anfangsausstattung präferieren

- **Tauschrate p*:**
  - Steigung der Geraden durch die Anfangsausstattungen und Marktallokation
  - Definiere daraus virtuelle GG-Preise p_1^*, p_2^* mit $p^* = p_1/p_2$

  → Relativer Preis zählt, nicht absoluter Preis

- **Ziel:** Finde die Gleichgewichts-Tauschrate, sodass die (Budget-)Gerade am gleichen Punkt tangential zu beiden Indifferenzkurven ist.

Edgeworth-Box



Berechnung: Step by step

1. Bestimme **die individuellen Nachfragen beider Gruppen** in Abhängigkeit der Tauschrate p*: $x_1^A(p^*)$ und $x_1^B(p^*)$

$$\max_{x_1^j, x_2^j} u^j(x_1^j, x_2^j)$$

$$\text{s.t } p_1^* x_1^j + p_2^* x_2^j = Y = p_1^* e_1^j + p_2^* e_2^j \quad \text{für } j = A, B$$

2. Setze $x_1^A(p^*)$ und $x_1^B(p^*)$ in **Markträumungsgleichung** für z.B. Gut 1 ein und bestimme dadurch $p^* = p_1/p_2$

$$x_1^A(p) + x_1^B(p) = e_1^A + e_1^B$$

3. Bestimme **die konkreten nachgefragten Mengen** $x_1^A(p^*)$ und $x_1^B(p^*)$ durch Einsetzen von p*
4. Mittels Budgetrestriktion nun die **Mengen des anderen Gutes** (x_2^A und x_2^B) bestimmen.

Shortcuts/Tipps

- **Edgeworth-Box** als graphisches Mittel nutzen, um ein Gefühl zu bekommen.

- **Substitute**
  - Bei innerer Lösung diktiert die Gruppe mit perfekten Substituten das Tauschverhältnis

$$GRS_{1,2}(x_1^*, x_2^*) \stackrel{!}{=} -\frac{p_1^*}{p_2^*}$$

- **Perfekte Komplemente**
  - Eindeutig definierte Nachfrage

$$ax_1^* \stackrel{!}{=} bx_2^*$$

- Bei unterschiedlicher Anzahl an Individuen pro Seite
  - Direkter Einfluss nur auf die Markträumungsbedingung und Weltausstattung

Beispielhafte Berechnung: Substitute

- **Situation**
  - Eine Partei hat eine Substitute-Nutzenfunktion
  - Andere Partei hat eine klar definierte Nachfrage, z.B. Cobb-Douglas oder Komplemente

1. **Abschätzung**
   - Zeichne Rahmen der Edgeworth-Box (Breite = $e_1^A + e_1^B$; Höhe = $e_2^A + e_2^B$)
   - Indifferenzkurven skizzieren
   - Schätzung: Innere Lösung?
2. **Berechnung (Bei innerer Lösung)**
   - Preisverhältnis: $p^* = \frac{p_1}{p_2} \stackrel{!}{=} -GRS_{1,2}(x_1^*, x_2^*)$; GRS der Substitute-Präferenzen
   - Budget $Y^i = p_1 * e_1^i + p_2 * e_2^i$ → Für beide Typen berechnen
   - Nachfrage für Partei mit klar definierter Nachfrage berechnen (Cobb-Douglas/ Komplemente)
   - Markträumung → Allokation für Partei mit Substituten

Beispielhafte Berechnung: Zwei Cobb-Douglas-Nutzenfunktionen

- **Situation**
  - Beide Gruppen gleich groß, beide mit Cobb-Douglas-Nutzen

1. **Abschätzung**
   - Zeichne Rahmen der Edgeworth-Box (Breite = $e_1^A + e_1^B$; Höhe = $e_2^A + e_2^B$)
   - Indifferenzkurven skizzieren
   - Auf jeden Fall: Innere Lösung!
2. **Berechnung**
   - Nachfrage in Abhängigkeit von Y:

$$(x_1^{*A}, x_2^{*A}) = \left(\alpha\frac{Y}{p_1}, (1-\alpha)\frac{Y}{p_2}\right), \ (x_1^{*B}, x_2^{*B}) = \left(\beta\frac{Y}{p_1}, (1-\beta)\frac{Y}{p_2}\right)$$

   - Aus Markträumung folgt:

$$p^* = \frac{\alpha e_2^A + \beta e_2^B}{(1-\alpha)e_1^A + (1-\beta)e_1^B}$$

   - Rest wie üblich

Spezialfall: Cobb-Douglas-Nutzen mit vertauschter Anfangsausstattung

- **Situation**
  - Gleiche Cobb-Douglas-Nutzenfunktion für beide Parteien
  - Gleich große Gruppen
  - „Vertauschte“ Anfangsausstattung: $e_1^A = e_2^B$ und $e_2^A = e_1^B$

1. **Abschätzung**
   - Zeichne Rahmen der Edgeworth-Box (Breite = $e_1^A + e_1^B$; Höhe = $e_2^A + e_2^B$)
   - Indifferenzkurven skizzieren
   - Auf jeden Fall: Innere Lösung!
2. **Berechnung**
   - Nachfrage in Abhängigkeit von Y: $\left(\alpha\frac{Y}{p_1}, (1-\alpha)\frac{Y}{p_2}\right)$
   - Markträumung für Gut 1:

$$\alpha\frac{Y^A}{p_1} + \alpha\frac{Y^B}{p_1} = \alpha\frac{p_1 e_1^A + p_2 e_2^A}{p_1} + \alpha\frac{p_1 e_1^B + p_2 e_2^B}{p_1} \overset{!}{=} \overline{e_1}$$

$$\frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

   - Rest wie üblich

Viel Erfolg für die Klausur!

Fachschaft BWL