Thema 1 Zahlungsstrommodelle / Zinsmodelle:

Aufgabe Z 1.2.1

Donald Puck möchte seine 2 000 mühsam erarbeiteten Kröten anlegen. Zuerst fragt er seinen Onkel Diggibert, welcher ihm eine geometrische Verzinsung zu einem Zinssatz von 3 % anbietet. Seine Neffen erzählen ihm außerdem von dem Angebot der Bank aus Schwanenhausen, die eine kontinuierliche Verzinsung sowie eine unterjährige geometrische Verzinsung mit einer dritteljährlichen oder halbjährlichen Zinskapitalisierung zu einem nominellen Zins von 3 % anbietet.

a) Berechnen Sie für alle Varianten Donalds Vermögen nach einem Jahr.

gegeben: $K_0 = 2.000$, $r = 3\%$, Konvention: 30/360 , $T = 1$ (Jahr)

1) Geometrische Verzinsung:

$$K_T = K_0 * (1+r)^T$$

$$K_T = 2.000 * 1{,}03^1$$

$$= 2.060$$

2.) kontinuierliche Verzinsung: nomineller Jahreszinssatz: $u = 3\% = 0{,}03$

$$K_T = K_0 * e^{u*T}$$

$$K_T = 2.000 * e^{0{,}03*1} \approx 2060{,}91 \quad (€)$$

3) unterjährige Verzinsung:

$$K_T = K_0 * \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{m*T}$$

* Zinskapitalisierung

m = 1 : ganzjährig
m = 2 : halbjährig
m = 4 : vierteljährlich
m = 12 : monatlich
m = 52 : wöchentlich
m = 360 : täglich

- $\frac{1}{3}$-jährlich: $K_T = 2.000 * \left(1 + \frac{0{,}03}{3}\right)^3 = 2060{,}60$
- $\frac{1}{2}$-jährlich: $K_T = 2.000 * \left(1 + \frac{0{,}03}{2}\right)^2 = 2060{,}45$

Altklausur HWS 08/09 : 1. Termin:

Aufgabe 4: ***(12 Punkte)***

Hanna möchte ihr gespartes Vermögen K_0 am 1.1. für ein volles Jahr anlegen. Hannas Bank bietet zwei Kontovarianten an, denen jeweils eine geometrische Verzinsung zugrunde liegt.

	Nomineller Guthabenzins	Zinsgutschrift	Monatlicher Pauschalpreis*
Variante A	3.00%	Halbjährlich	1.50 Euro
Variante B	2.00%	Monatlich	Kostenlos
* Der monatliche Pauschalpreis ist erst mit der jeweils nächsten Zinsgutschrift fällig. → nachschüssig			

a) Berechnen Sie Hannas Vermögen zu Silvester des nächsten Jahres sowie die resultierende Effektivverzinsung der einzelnen Varianten in Abhängigkeit des anfangs eingesetzten Kapitals. Runden Sie Zwischenergebnisse auf vier Stellen nach dem Komma. ***(9 Punkte)***

$$K_T = K_0 * \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

Variante A:

wird im 1. Schritt mit aufgezinst, also muss das Geld, das rauskommen wird auch aufgezinst werden

m * T

nur noch $\frac{1}{2}$ Jahr

$$K_T = K_0 * \left(1 + \frac{0{,}03}{2}\right)^2 - 6 * 1{,}50 * \left(1 + \frac{0{,}03}{2}\right)^1 - 6 * 1{,}50$$

$$= K_0 * 1{,}0302 - 18{,}135$$

$$r_{eff}^A = \sqrt[T]{\frac{K_T^A}{K_0}} - 1$$ → Formel siehe Renditerechnung

$$= \sqrt{\frac{K_0 * 1{,}0302 - 18{,}135}{K_0}} - 1$$

$$= 1{,}0302 - \frac{18{,}135}{K_0} - 1$$

$$= 0{,}0302 - \frac{18{,}135}{K_0}$$

Variante B:

$$K_T = K_0 * \left(1 + \frac{0{,}02}{12}\right)^{12}$$

$$= K_0 * 1{,}0202$$

$$r_{eff} = \sqrt[T]{\frac{K_T^B}{K_0}} - 1$$

$$= \frac{1{,}0202 * K_0}{K_0} - 1$$

$$= 2{,}02\ \%$$

b) Gehen Sie nun davon aus, dass sich Hannas Vermögen zu Silvester des nächsten Jahres für Variante A auf $K_1^A = K_0 \cdot 1.0304 - 18.40$ bzw. für Variante B auf $K_1^B = K_0 \cdot 1.0222$ beläuft. Wie sieht Hannas Kontowahl in Abhängigkeit des anfangs eingesetzten Kapitals aus? ***(3 Punkte)***

$$K_1^A > K_1^B$$

$$K_0 * 1{,}0304 - 18{,}4 > K_0 * 1{,}0222 \quad \| +18{,}4 - K_0 * 1{,}0222$$

$$0{,}0082\ K_0 > 18{,}4 \quad \| : 0{,}0082$$

falls $K_0 > 2.243{,}90$ $\Rightarrow$ Variante A vorziehen

Altklausur HWS 19/20 2. Termin:

Aufgabe 1: ***(9 Punkte)***

a) Welchen Betrag besitzen Sie, wenn Sie 100 Euro bei geometrischer Verzinsung für 3 Jahre zu einem jährlichen Zinssatz von $r = 1\%$ anlegen? ***(2 Punkte)***

$$K_T = K_0 * (1+r)^T$$

$$K_3 = 100 * (1+0{,}01)^3$$

$$= 103{,}03$$

b) Betrachten Sie ein Konto mit unterjähriger Zinsgutschrift. Wie hoch ist der äquivalente Jahreszinssatz bei dreimonatiger Zinsgutschrift und einem nominellen Jahreszins von $u = 3\%$ p.a.? Gehen Sie dabei von der Zinskonvention 30/360 aus! ***(3 Punkte)***

$$r_{eff} = \left(1+\frac{u}{m}\right)^m - 1$$

$$r_{eff} = \left(1+\frac{0{,}03}{4}\right)^4 - 1$$

$$= 0{,}0303 = 3{,}03\,\%$$

c) Sie legen Ihr Kapital auf einem Konto mit geometrischer Verzinsung und einem jährlichen Zinssatz von $r = 7\%$ an. Nach wie vielen Jahren hat sich Ihr Kapital verzehnfacht? ***(4 Punkte)***

Hinweis zu c): Es ist ausreichend Ihr Ergebnis als Dezimalzahl anzugeben.

$K_0 * (1+r)^T = 10 * K_0 \quad || : K_0$

$\Leftrightarrow \quad (1+r)^T = 10 \quad || \ln$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left((1+r)^T\right) = \ln(10) \quad ||$ Ln-Regel $\rightarrow \ln(X^n) = n * \ln(X)$

$\Leftrightarrow \quad T * \ln(1+r) = \ln(10) \quad || : \ln(1+r)$

$\Leftrightarrow \quad T = \frac{\ln(10)}{\ln(1+0{,}07)}$

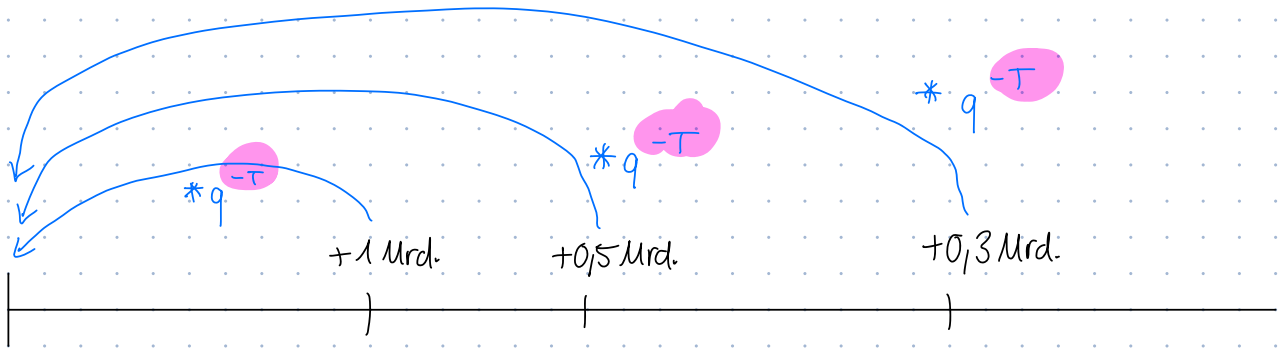
$\Leftrightarrow \quad T = 34{,}03$

Thema 2: Bewertung von Zahlungsströmen:

Aufgabe Z 1.3.2 – Barwert

Der skrupellose Gordon Gekko kann auf Grund von Insiderinformationen voraussichtliche Kursentwicklungen sehr gut abschätzen. Am 01.07.2017 plant er seine Aktien der Bluestar Airline für 1 Mrd. Euro zu verkaufen. Außerdem möchte er seine Anteile an einer Papierfabrik nach erfolgreicher Restrukturierung für 0.5 Mrd. Euro am 16.09.2017 veräußern. Um seinen nächsten großen Deal zu finanzieren, beabsichtigt er ferner weitere Gewinne von seinen Offshore-Depots in Höhe von 0.3 Mrd. Euro am 01.02.2018 einzulösen.

Berechnen Sie für Gekko den Barwert seiner Transaktionen zum 01.01.2017 bei einem Marktzinssatz von 8% unter der Konvention 30/360, wenn er seine Geschäfte wie geplant durchführt.



1.) vom 01.01.17 – 01.07.17 : 6 Monate → $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ (Jahre)

2.) vom 01.01.17 – 16.09.17 : [16 – 1] + [9 – 1] * 30 = 255

3.) vom 01.01.17 – 01.02.18 : 13 Monate → $\frac{13}{12}$

$r = 8\% = 0{,}08$

$K_0 = 1\ \text{Mrd.} * 1{,}08^{-\frac{6}{12}} + 0{,}5\ \text{Mrd.} * 1{,}08^{-\frac{255}{360}} + 0{,}3\ \text{Mrd} * 1{,}08^{-\frac{13}{12}}$

$= 1{,}71\ \text{Mrd}$

Altklausur HWS 18/19: 1. Termin:

Aufgabe 3: ***(7 Punkte)***

Betrachten Sie folgende Investition mit den Zahlungen $\{-az_0, z_1, z_2\} = \{-1\,000, 400, 700\}$.

a) Bestimmen Sie den Kapitalwert dieser Investition, falls der Zinssatz über die gesamte Laufzeit bei $r = 4\%$ p.a. liegt. Ist die Investition vorteilhaft? ***(3 Punkte)***

$-az_0$

$K_0 = -1.000 + 400 * 1{,}04^{-1} + 700 * 1{,}04^{-2}$

$= 31{,}80$

$K_0 > 0 \rightarrow$ vorteilhaft

b) In $t = \frac{1}{2}$ steigt der Zinssatz überraschenderweise auf 10% p.a. und verbleibt anschließend für die restliche Zeit auf diesem Niveau. Bestimmen Sie den Kapitalwert der Investition in $t = 0$ erneut. Ist die Investition immer noch vorteilhaft? ***(4 Punkte)***

$K_0 = -1.000 + 400 * 1{,}04^{-0{,}5} * 1{,}1^{-0{,}5} + 700 * 1{,}04^{-0{,}5} * 1{,}1^{-1{,}5}$

$= -31{,}05$

$K_0 < 0 \Rightarrow$ Investion ist NICHT mehr vorteilhaft !

Thema 3 Rentenrechnung:

Aufgabe 2: ***(8 Punkte)***

a) Welchen Geldbetrag müssen Sie bei einem Zinssatz von 2% p.a. heute anlegen, um eine sofort beginnende jährliche vorschüssige Rente in Höhe von 4 250 Euro über einen Zeitraum von 30 Jahren zu erhalten? ***(5 Punkte)***

Ansatz: Barwert einer jährlichen vorschüssigen Rente:

$$BW_v = R * \frac{q^T - 1}{q - 1} * q^{-(T-1)}$$

$$BW_v = 4.250 * \frac{1{,}02^{30} - 1}{1{,}02 - 1} * 1{,}02^{-(30-1)}$$

$$\approx 97.088{,}63\ (€)$$

b) Nehmen Sie nun an, eine monatlich vorschüssige Rente hätte einen heutigen Wert von 25 000 Euro. Wie viel Kapital benötigen Sie, wenn Sie die Rente monatlich nachschüssig erhalten wollen und der Marktzinssatz bei 5% p.a. liegt? ***(3 Punkte)***

- monatlich vorschüssig, $r = 0{,}05$
  - ↳ Wunsch: monatlich nachschüssig

$$25.000 * 1{,}05^{-\frac{1}{12}} \approx 24.898{,}56\ €$$

Aufgabe 3: ***(6 Punkte)***

Die Studentin Sabrina würde gerne heute schon etwas für ihre Altersvorsorge tun. Welchen Einmalbetrag müsste sie heute anlegen, wenn sie in 45 Jahren eine monatlich vorschüssige Rente in Höhe von 700 Euro über einen Zeitraum von 30 Jahren erhalten möchte? Gehen Sie davon aus, dass der Zinssatz über den gesamten Zeitraum bei 2% liegt.

gegeben:

monatl. vorschüssig, $R = 700$, $T = 30 * 12 = 360$ (Monate)

$$BW_{t=45} = 700 * \frac{1{,}02^{\frac{360}{12}} - 1}{1{,}02^{\frac{1}{12}} - 1} * 1{,}02^{-\frac{359}{12}} \approx 190.162{,}1381$$

$$190.162{,}1381 * 1{,}02^{-45} = 78.003{,}90\ (€)$$

A: Sie müsste heute 78.003,90 € anlegen

Altklausur: HWS 09/10 Zweittermin:

Aufgabe 3: ***(10 Punkte)***

Bei einem Zinssatz von 4% p.a. sparen Sie monatlich nachschüssig einen geometrisch wachsenden Betrag. Ihre erste Sparrate beträgt 50 Euro, die zweite liegt 5 Cent höher, die weiteren wachsen entsprechend. Nach 10 Jahren beenden Sie die Ansparphase. Welches Kapital haben Sie am Ende angespart?

gegeben:

$r = 0{,}04$ / monatl. nachschüssige Rente $*c$ $R_1 = 50$ $T = 10$ Jahre $= 10*12 = 120$ Monate

Endwert einer dynamischen monatlichen Rente:

$$EW_n = R * \frac{q^{\frac{T}{12}} - c^{\frac{T}{12}}}{q^{\frac{1}{12}} - c^{\frac{1}{12}}}$$

Nebenrechnung:

$50 * c = 50{,}05 \quad |: 50$

$\Leftrightarrow c = 1{,}001$

$$EW_n = 50 * \frac{1{,}04^{\frac{120}{12}} - 1{,}001^{120}}{1{,}04^{\frac{1}{12}} - 1{,}001} \approx 7.758{,}47$$

4. Thema Tilgungsrechnung:

Altklausur – HWS 18/19 Ersttermin:

Aufgabe 2: ***(12 Punkte)***

Betrachten Sie ein Annuitätendarlehen über $S_0 = 50\,000$ Euro. Gehen Sie dabei von einem Zinssatz von $r = 3\%$ p.a., nachschüssigen Annuitäten und einer Laufzeit von zwei Jahren aus. Runden Sie alle Zwischen- und Endergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.

a) Füllen Sie den zugehörigen Tilgungsplan aus. ***(8 Punkte)***

$z_1 = 50.000 * 0{,}03 = 1.500$

$A = 50.000 * \frac{1{,}03^2 * 0{,}03}{1{,}03^2 - 1} \approx 26.130{,}54$

t	S_0, RS_{t-1}	Z_t $RS_{t-1} * 0{,}03 = z_t$	T_t $(A_t - z_t = T_t)$	A_t	RS_t $RS_{t-1} - T_t = RS_t$
1	50.000	1.500	24.630,54	26.130,54	25.369,46
2	25.369,46	761,08	25.369,46	26.130,54	0

b) Wie hoch müsste die äquivalente Annuität sein, wenn die Annuitätenzahlungen nicht jährlich sondern monatlich nachschüssig zu erbringen wären? ***(4 Punkte)***

Basierend auf dem Äquivalenzprinzip : T = 2 Jahre = 24 Monate

$$S_0 = BW_n = A * \frac{q^{\frac{1}{m}} - 1}{q^{\frac{1}{m}} - 1} * q^{-\frac{T}{m}}$$

$$S_0 = BW_n = A * \frac{1{,}03^{\frac{24}{12}} - 1}{1{,}03^{\frac{1}{12}} - 1} * 1{,}03^{-\frac{24}{12}}$$

$$50.000 = A * 23{,}27567386 \quad | : 23{,}27567386$$

$$\Leftrightarrow A \approx 2.148{,}17$$

Altklausur: HWS 11/12:

Aufgabe 3: ***(11 Punkte)***

Nachdem das Scotch Fachgeschäft von Herrn E.T.A. Noll bei den Kunden großen Anklang findet, kauft er am 1. Januar eine Mälzerei für 2 500 000 Euro. 20% des Preises kann er aus seinem angesparten Vermögen begleichen, für den Rest nimmt er ein Annuitätendarlehen zu einem Zinssatz von 6% p.a. auf. Nach wie vielen Jahren ist das Darlehen getilgt, wenn Herr Noll jährlich am Jahresende eine Annuität von 150 000 Euro leisten kann? Wie hoch ist die Schlusszahlung im letzten Jahr?

Hinweis: Die Formel zur Bestimmung der Laufzeit muss NICHT hergeleitet werden.

$S_0 = 2.500.000 * 0{,}8 = 2.000.000$

$r = 0{,}06$

$T = ?$

$A_n = 150.000$

$$T_n = \frac{\ln(A) - \ln(A - S_0 * r)}{\ln(q)}$$

$$T_n = \frac{\ln(150.000) - \ln(150.000 - 2.000.000 * 0.06)}{\ln(1{,}06)}$$

$\approx 27{,}62$

Restschuld : Ende Jahr 27:

$$RS_{27} = 2.000.000 * 1{,}06^{27} - 150.000 * \frac{1{,}06^{27} - 1}{1{,}06 - 1}$$

$$= 88.827{,}02965$$

Restzahlung $_{28}$:

$$RZ_{28} = \boxed{RS_{27} * 1{,}06} \approx 94.156{,}65$$

Altklausur : HWS 12/13 : Ersttermin:

Aufgabe 2: ***(12 Punkte)***

a) Vervollständigen Sie folgenden Tilgungsplan. Gehen Sie dabei von einem Zinssatz von 7,5% p.a., nachschüssigen Annuitäten und einer Laufzeit von exakt 2 Jahren aus. Runden Sie alle Zwischenergebnisse und Endergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.

(8 Punkte)

t	S_0, RS_{t-1}	Z_t	T_t	A_t	RS_t
1	12.000	900	5.783,13	6.683,13	6.216,87
2	6.216,87	466,97	6.216,86	6.683,13	0

$S_0 * 0{,}075 = 900 \quad | : 0{,}075$

$\Leftrightarrow S_0 = 12.000$

$$A = 12.000 * \frac{1{,}075^2 * 0{,}075}{1{,}075^2 - 1} \approx 6.683{,}13$$

b) Fabrikbesitzer F. will eine Anfangsschuld von 50.000 Euro innerhalb von 10 Jahren tilgen. Seine Bank unterbreitet ihm das folgende Angebot. Er soll über den gesamten Zeitraum jeweils am Anfang des Jahres eine konstante Rate zahlen und ist dann nach der letzten Zahlung im zehnten Jahr schuldenfrei. Wie hoch muss die jährliche Rate sein, wenn die Bank mit einem Zinssatz von 12% p.a. rechnet? ***(4 Punkte)***

$S_0 = 50.000 \qquad T = 10 \qquad r = 0{,}12$

$$50.000 = A * \frac{1{,}12^{10} - 1}{1{,}12 - 1} * 1{,}12^{-9}$$

$$\Leftrightarrow 50.000 = A * 6{,}328249799 \quad | : 6{,}328249799$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A \approx 7.901{,}08}$$

Thema 5: Kursrechnung:

Aufgabe 1: ***(9 Punkte)***

Betrachten Sie in der gesamten Aufgabe einen Marktzins von $r = 2\%$ p.a. über die gesamte Laufzeit.

a) Bestimmen Sie den fairen Preis eines Standardbonds mit einer Restlaufzeit von 5 Jahren, einem Nennwert von $N = 10\,000$ und einem Nominalzins von $i = 4\%$. Die gegenwärtig anfallenden Zinsen sind bereits ausgezahlt. ***(5 Punkte)***

1. Schritt: i & r vergleichen

$i > r$: $P_0 > N$ (Preis über Pari)

$P_0 > 10.000$

2. Schritt: Fairen Preis P_0 berechnen:

$T = 5$, $N = 10.000$, $i = 0{,}04$, $z = 400$

$$P_0\,(0{,}02) = 400 * \frac{1{,}02^{5} - 1}{1{,}02 - 1} * 1{,}02^{-5} + 10.000 * 1{,}02^{-5}$$

$$\approx 10.942{,}69$$

b) Bestimmen Sie den fairen Preis einer Aktie, die in wenigen Augenblicken eine Dividende von 3 Euro ausschütten wird. In den darauffolgenden Jahren wird die Dividende um 1,5% pro Jahr wachsen. ***(4 Punkte)***

gegeben: $g = 0{,}015$ $r = 0{,}02$

$$P_0(r) = D_0 + D_0 * \left(\frac{1+g}{r-g}\right)$$

$$P_0(0{,}02) = 3 + 3 * \frac{1{,}015}{0{,}02 - 0{,}015} \approx 612$$

Altklausur : HWS 16/17 : Erstermin:

Aufgabe 3: ***(9 Punkte)***

Industriespion Stan Bond hat geheime Dokumente gefunden, aus denen die zukünftige Finanzplanung eines großen Unternehmens ersichtlich wird. Hieraus geht hervor, dass die jährlichen Dividendenzahlungen des Unternehmens zukünftig um 1% pro Jahr steigen werden. Die soeben ausgezahlte Dividende betrug 50 Euro pro Aktie.

a) Gehen Sie davon aus, dass der Marktzinssatz 2% p.a. beträgt. Welchen Preis würde S. Bond für eine Aktie des Unternehmens aktuell höchstens zahlen? ***(4 Punkte)***

$g = 0{,}01$ nach Auszahlung von $D_0 = 50$

a) $r = 0{,}02$

$$P_0(0{,}02) = \frac{D * 1+g}{r - g}$$

$$P_0(0{,}02) = \frac{50 * 1{,}01}{0{,}02 - 0{,}01} \approx 5.050$$

Im Kleingedruckten liest S. Bond dann aber, dass die Dividende nur in den kommenden 3 Jahren steigen wird, und danach für immer auf der erreichten Höhe bleiben wird.

b) Welchen Preis würde S. Bond nun für eine Aktie des Unternehmens aktuell höchstens zahlen, wenn der Marktzinssatz weiterhin bei 2% p.a. liegt? ***(5 Punkte)***

Ansatz: Fairer Preis = BW einer jährlich wachsenden Rente + abgezinster BW einer ewigen konstanten Rente

$$P_0\,(0{,}02) = 50 * 1{,}01 \cdot \frac{1{,}02^3 - 1{,}01^3}{1{,}02 - 1{,}01} \cdot 1{,}02^{-3} + \frac{50 \cdot 1{,}01^3}{0{,}02} \cdot 1{,}02^{-3}$$

$$= \boxed{2.574{,}27}$$

Altklausur: HWS 12/13 Ersttermin:

Aufgabe 3: ***(6 Punkte)***

Unmittelbar nach einer Dividendenzahlung am 1.4.2011 erwerben Sie eine Aktie der Mannheimer Maschendraht und Maßkrug AG zum fairen Preis von 85 Euro. Ein Jahr später erhalten sie die erste Dividendenzahlung in Höhe von 2,55 Euro. Gehen Sie davon aus, dass die Dividenden jedes Jahr um einen konstanten Faktor wachsen und der risikoadjustierte Zinssatz 8% p.a. beträgt. Wie hoch ist die Dividendenzahlung, die am 1.4.2014 erfolgt?

$P_0 = 85 (€)$ $\quad D_1 = 2{,}55$ $\quad g = ?$ $\quad r = 0{,}08$

$$P_0 = \frac{D_1}{r - g} \qquad 11 * (0{,}08 - g)$$

$\Leftrightarrow 6{,}8 - 85g = 2{,}55 \quad | -2{,}55 \quad | +85g$

$\Leftrightarrow 85g = 4{,}25 \quad | : 85$

$\Leftrightarrow g \approx 0{,}05$

2012 = 2,55

2013 = $2{,}55 * 1{,}05 \approx 2{,}6775$

2014 = $2{,}55 * 1{,}05^2 \approx 2{,}81$

Thema 6: Renditerechnung:

Aufgabe Z 3.2.3 – Annualisierte Rendite eines endfälligen Investments
Sie erwerben am 01.07 eine Anleihe mit einem Nennwert von 2 500 Euro und einer Laufzeit von 10 Jahren zu pari. Der Titel zahlt neben einer endfälligen Tilgung monatlich nachschüssige Zinszahlungen in Höhe von 0.5% des Nennwerts. Sämtliche Rückflüsse legen Sie unmittelbar auf einem Konto mit einer jährlichen Verzinsung zu 2% p. a. an. Am 01.01. jeden Jahres wird von dem Konto automatisch eine Gebühr in Höhe von 10 Euro eingezogen. Am Ende der Laufzeit heben Sie das komplette Vermögen von Ihrem Konto ab. Wie hoch war die effektive jährliche Verzinsung des Investments? (Verwenden Sie die Konvention 30/360.)

gegeben: $N = 2.500$, $T = 10$, $Z = 0{,}005 * 2.500$, $r = 2\%$, Gebühr $= 10€$

$$K_T = \overbrace{2.500}^{N} + \overbrace{0{,}005 * 2.500}^{Z} * \frac{1{,}02^{\frac{120}{12}} - 1}{1{,}02^{\frac{1}{12}} - 1} - \overbrace{10}^{\text{Gebühr}} * \frac{1{,}02^{10} - 1}{1{,}02 - 1} * 1{,}02^{0{,}5}$$

Faktor

beginnt erst 0,5 Jahr später

wie hoch die Gebühr am 01.01. ist

$$= 4.157{,}46 - 110{,}59 = 4.046{,}87$$

Effektivverzinsung:

$$r_{eff} = \sqrt[10]{\frac{4.046{,}87}{2.500}} - 1 = 0{,}0493 = 4{,}93\%$$

Aufgabe Z 3.2.2 – Annualisierte Renditen

Für den Fondsmanager Pierre steht das jährliche Feedbackgespräch mit seinem Chef an. Nach fetten Jahren hat die Finanzkrise ein großes Loch in sein Portfolio gerissen. In den fünf Bullenjahren hat er seinen Chef mit Renditen von 10 %, 17 %, 20 %, 18 % und phänomenalen 32 % beglückt. Die Finanzkrise überraschte ihn jedoch dermaßen, dass sein Portfolio mit −40 % abstürzte. Auch im darauffolgenden Jahr konnte er sein Versprechen, nämlich eine positive Rendite einzufahren, nicht halten und verlor weitere 10 %.

Welche geometrisch annualisierte und welche arithmetisch annualisierte Rendite hat Pierre über die letzten sieben Jahre erzielt?

geometrisch:

$$r_4 = \sqrt[7]{(1+0{,}1)\cdot(1+0{,}17)\cdot(1+0{,}2)\cdot(1+0{,}18)\cdot(1+0{,}32)\cdot(1-0{,}4)\cdot(1-0{,}1)} - 1$$

$r_4 = 3{,}81\,\%$ → korrekt ⇒ berücksichtigt unterjährige Schwankungen

↳ was am Ende tatsächlich auf dem Konto ist

arithmetisch:

$$r_A = \frac{1}{7} * (0{,}1 + 0{,}17 + 0{,}2 + 0{,}18 + 0{,}32 - 0{,}4 - 0{,}1)$$

$r_A = 6{,}71\,\%$ → Approximation

$$\boxed{r_A \geq r_G}$$

Aufgabe Z 3.2.7 – Interne Rendite

Am 01.01.2018 investiert Unternehmen X in eine neue Fabrik, welche einen Kaufpreis von 250 000 Euro besitzt. Beim Kauf der Fabrik fallen zusätzliche Nebenkosten in Höhe von 10% des Kaufpreises an. Durch den Kauf der Fabrik erzielt Firma X zusätzliche Einnahmen, die jeweils am Ende eines Jahres an Firma X gezahlt werden. Im ersten Jahr belaufen sich die Einnahmen auf insgesamt 20 000 Euro. Im zweiten Jahr sind die Einnahmen jedoch um 20% gefallen. Aus diesem Grund beschließt Firma X die Fabrik am 01.01.2020 für 250 000 Euro zu verkaufen.

a) Berechnen Sie die interne Rendite der Investition.

Zahlungsstrom: $z = \{-275.000 \overset{t_1=1}{,} 20.000 \,, 266.000\}$

$$0 = -275.000 * q^2 + 20.000\,q + 266.000 \quad |: (-275.000)$$

$$\Leftrightarrow 0 = q^2 - 0{,}0727\,q - 0{,}9673$$

pq-Formel:

$$q_{1/2} = 0{,}03635 \pm \sqrt{0{,}00132323 + 0{,}9673}$$

$$q_1 = 1{,}0205 \quad \wedge \quad q_2 = -0{,}9478$$

$$\hookrightarrow r_I = q_1 - 1 = 0{,}0205 \Rightarrow 2{,}05\,\%$$

Altklausur: HWS 12/13 1. Termin:

Aufgabe 5: ***(10 Punkte)***

Sie beschließen, Ihr angespartes Vermögen von 1000 Euro gewinnbringend zu investieren. Ihr Anlageberater bietet Ihnen die folgende Investitionskombination an. Die Hälfte des Geldes wird in einen Standardbond mit 2 Jahren Laufzeit angelegt. Der Titel hat einen Nennwert von 550 Euro und zahlt jährlich nachschüssige Zinsen bei einem Nominalzinssatz von 5%. Für den Rest des Vermögens wird ein Zero Bond mit zwei Jahren Restlaufzeit und einem Rückzahlungsbetrag von 600 Euro erworben.

a) Stellen Sie die Zahlungsströme für die Einzelinvestments und den Gesamtzahlungsstrom auf. ***(3 Punkte)***

Standardbond: $z_S = \{-500; 27{,}5; 577{,}5\}$

Zerobond: $z_z = \{-500; 0; 600\}$

Gesamt: $z_G = \{-1000; 27{,}5; 1.177{,}5\}$

b) Bestimmen Sie den internen Zinsfuß der Investition in den Standardbond. Runden Sie hierbei alle Zwischenergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma. ***(6 Punkte)***

$$0 = -500q^2 + 27{,}5q + 577{,}5$$

ABC-Formel:

$$q_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-27{,}5 \pm \sqrt{27{,}5^2 + 4 * 500 * 577{,}5}}{-2.500}$$

$$\Rightarrow \quad q_1 = -1{,}0476$$

$$q_2 = 1{,}1021 \quad \Rightarrow \quad r_2 = 0{,}1021 \quad \Rightarrow 10{,}21\,\%$$

---

c) Beurteilen Sie, ob die Investition in den Standardbond vorteilhaft war, wenn der Marktzinssatz über dem gesamten Zeitraum bei 8% p.a. lag. ***(1 Punkt)***

$r_I > r_M \quad \Rightarrow$ Investition vorteilhaft

$10{,}21\,\% > 8\,\%$

Extraaufgabe: unterjährige Verzinsung etc.

Aufgabe 1: ***(8 Punkte)***

a) Der Sparer Stefan legt 250 Euro in einen Sparbrief mit jährlich variierenden Zinssätzen in Höhe von 1%, 2%, 2,5% und 3,5% (jeweils p.a.) an. Wie hoch ist sein Endvermögen nach 4 Jahren? ***(2 Punkte)***

$K_4 = 250 * 1{,}01 * 1{,}02 * 1{,}025 * 1{,}035$

$= 273{,}23$

b) Anita möchte Geld sparen, um sich in 5 Jahren einen neuen PKW leisten zu können. Wie viel Geld muss sie heute anlegen, wenn ihr Traumauto 60 000 Euro kosten wird und der jährliche Zinssatz bei 3,5% liegt? ***(2 Punkte)***

$K_0 = 60.000 * 1{,}035^{-5}$

$= 50.518{,}39$

c) Der Anleger Anton investiert 800 Euro in eine Kontovariante mit unterjähriger Verzinsung und verfügt nach Ablauf eines Jahres über ein Vermögen von 850 Euro. Die Zinsen werden dabei halbjährlich gutgeschrieben. Wie hoch ist der verwendete nominelle Jahreszins u? ***(4 Punkte)***

$m = 2$

$$800 * \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{u} = 850$$

$$800 * \left(1 + \frac{u}{2}\right)^{2} = 850 \quad | : 800$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{u}{2}\right)^{2} = \frac{850}{800} \quad | \sqrt{\ } - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{850}{800}} - 1 \quad | * 2$$

$$\Leftrightarrow u = 2 * \left(\sqrt{\frac{850}{800}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow u = 6{,}16\,\%$$

Extraaufgabe: K_0 / Barwert (BW):

Altklausur HWS 14/15 1. Termin:

Aufgabe 5: ***(10 Punkte)***

Eine Investition weise den Zahlungsstrom Z = {-10 000, 5 000, 5 500} auf.

a) Bestimmen Sie den Kapitalwert der Investition unter Annahme eines Marktzinssatzes von 6% p.a. Ist die Investition vorteilhaft? ***(4 Punkte)***

$$K_0 = -10.000 + 5.000 * 1{,}06^{-1} + 5.500 * 1{,}06^{-2}$$

$$= -388{,}04 < 0$$

$\Rightarrow$ Investition ist NICHT vorteilhaft !

Ein Unternehmen plant eine längerfristige Investition bei der zunächst eine Anfangsauszahlung in Höhe von 350 000 Euro zu tätigen ist. Nach Schätzung der zu erwartenden Rückflüsse errechnet das Unternehmen einen Kapitalwert der Investition von 6 500 Euro. Aufgrund von Lieferproblemen eines Subunternehmers werden sich die Rückflüsse jedoch um 120 Tage verzögern (Gehen Sie von der Konvention 30/360 aus).

b) Bestimmen Sie den neuen Kapitalwert der Investition. Ist sie weiterhin vorteilhaft? Gehen Sie hierbei von einem Kapitalmarktzins in Höhe von 3% p.a. aus. ***(6 Punkte)***

1. Barwert der Rückflüsse:

$$K_0 = -az_0 + BW_R$$

$$BW^R = K_0 - (-az_0) = 6.500 + 350.000 = 356.000$$

2. Barwert der verzögerten Rückflüsse:

$$BW^R_{neu} = BW^R * 1{,}03^{-\frac{120}{360}} = 353.004{,}68$$

damit gilt:

$$K_0^{neu} = -az_0 + BW_{neu}^R = 3.004{,}68 > 0$$

↳ Investition immernoch vorteilhaft

Extraaufgabe: Endwert (EW):

Aufgabe 5: ***(8 Punkte)***

Architekt A. arbeitet immer jeweils drei Wochen im Büro und ist anschließend eine Woche auf der Baustelle. Die Fahrten zur Baustelle werden dabei von seiner Firma bezahlt, für die Fahrten ins Büro nutzt er das Auto auf eigene Kosten. Hierzu benötigt er genau eine Tankfüllung pro Woche. Diese kostet ihn in der ersten Woche 50 Euro, danach steigen die Benzinpreise wöchentlich um 0,5%. Gehen Sie davon aus, dass das Jahr genau 52 Wochen hat. Wie viel Geld hätte A. am Ende eines Jahres angespart, wenn er anstatt mit seinem Auto mit dem Fahrrad ins Büro fahren, und die dadurch wegfallenden wöchentlichen Benzinkosten jeweils am Ende der Woche auf ein extra eingerichtetes Konto mit einem Zinssatz von 3,5% p.a. einzahlen würde?

(Tipp: Überlegen Sie zunächst, wie viel er ansparen könnte, wenn er jede Woche im Büro arbeiten würde.)

1) jede Woche im Büro:

$$EW = 50 * \frac{q^{\frac{52}{52}} - c^{52}}{q^{\frac{1}{52}} - c} = 50 * \frac{1{,}035 - 1{,}005^{52}}{1{,}035^{\frac{1}{52}} - 1{,}005}$$

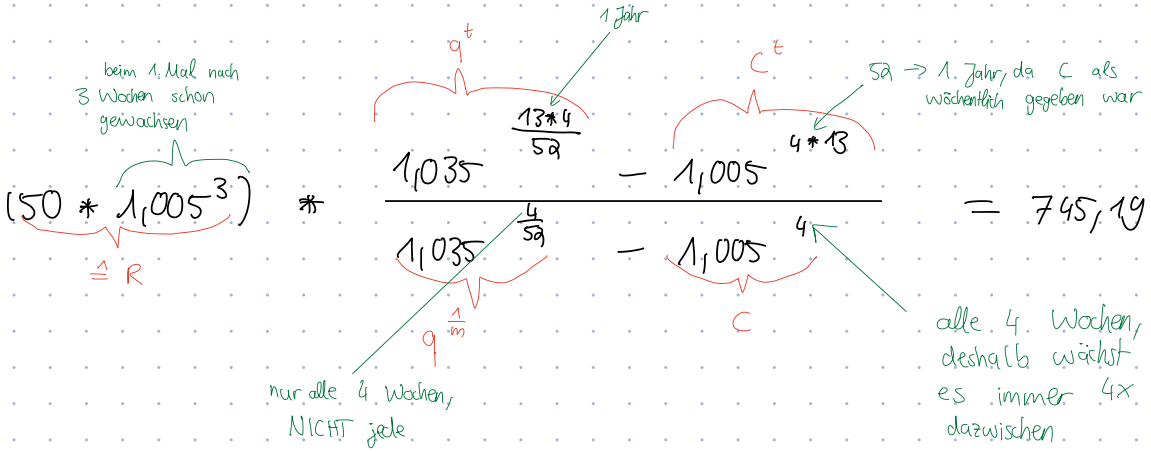
$$= 3.009{,}19$$

2) nur drei Wochen im Büro:

→ insg. 13 Mal (52 : 4)

→ nachschüss. Rente

→ Wachstumsfaktor: $1{,}005^{4}$



3. insgesamter Endwert:

$$K_1 = 3.009{,}19 - 759{,}19 = 2.252$$

Extraaufgabe: Rentenrechnung:

Altklausur HWS 08/09 Ersttermin:

Aufgabe 5: ***(8 Punkte)***

Dozentin Alex kauft und trinkt an jedem Arbeitstag eine Flasche Wasser. Die Flasche Wasser kostet 0.44 Euro inklusive 0.25 Euro Pfand. Leere Flaschen sammelt Alex in ihrem Büro. Gehen Sie davon aus, dass Alex sieben Tage die Woche arbeitet und das Jahr genau 52 Wochen hat.

a) Wie viel Pfand bekommt Alex am Ende des Jahres, wenn sie alle Flaschen auf einmal zurück bringt? ***(2 Punkte)***

b) Wie viel Geld hätte Alex am letzten Abend des Jahres zur Verfügung, wenn sie die getrunkenen Flaschen am Abend jedes Tages zurück bringen würde und das kassierte Pfand sofort auf ein extra für diesen Zweck eingerichtetes Konto einzahlen würde? Gehen Sie von einem täglichen Zinssatz in Höhe von 0.03% aus. ***(6 Punkte)***

Hinweis: Die Teilaufgaben sind mathematisch nicht aufeinander aufbauend und somit einzeln lösbar.

a) Arbeitstage im Jahr = $7 * 52 = 364$

Pfand insgesamt = $0{,}25 * 364 = 91$ $\Rightarrow$ 91 €

b)

$$EW_n = 0{,}25 * \frac{1{,}0003^{364} - 1}{1{,}0003 - 1} \approx 96{,}14$$

$\Rightarrow$ 96,14 €

Extraaufgabe: Tilgungsrechnung:

Aufgabe 1: ***(11 Punkte)***

Sie nehmen ein Annuitätendarlehen in Höhe von 8 000 Euro zu einem Zinssatz von 5% p.a. auf. Nach drei Jahren wollen Sie schuldenfrei sein, wobei Sie die Annuitäten jährlich nachschüssig erbringen. Stellen Sie einen Tilgungsplan nach unten angegebenem Muster auf. *(Runden Sie in dieser Aufgabe auch die Zwischenergebnisse auf 2 Nachkommastellen.)*

t	S_0, RS_{t-1}	Z_t	T_t	A_t	RS_t
1	8 000	400	2.537,67	2.937,67	5.462,33
2	5.462,33	273,12	2.664,55	2.937,67	2.797,78
3	2.797,78	139,89	2.797,78	2.937,67	0.00

(A) $= S_0 * \frac{r}{1-q^{-T}} = 8.000 * \frac{0,05}{1-1,05^{-3}} = 2.937,67$

$Z = RS_{t-1} * r$

$T = A_t - Z_t$

$RS_t = RS_{t-1} - T_t$

Extraaufgabe: Kursrechnung:

Altklausur: HWS 13/14

Aufgabe 1: ***(10 Punkte)***

Berechnen Sie die fairen Kurse der folgenden Finanztitel zum heutigen Zeitpunkt, wenn der Marktzinssatz bei 4% p.a. liegt:

a) Ein Zerobond mit einer Laufzeit von 5 Jahren und einem Nennwert von 3 000 Euro. ***(2 Punkte)***

b) Ein Standardbond mit einer Restlaufzeit von 8 Jahren und einem Nominalzinssatz von 5%. Die gegenwärtig anfallenden Zinsen in Höhe von 80 Euro sind bereits ausgezahlt. ***(5 Punkte)***

c) Eine Aktie eines sehr erfolgreichen Unternehmens, die vor wenigen Augenblicken eine Dividende in Höhe von 20 Euro ausgezahlt hat. Gehen Sie davon aus, dass die Dividende in Zukunft um 2% pro Jahr wachsen wird. ***(3 Punkte)***

$r = 0{,}04$ / $q = 1{,}04$

a) $T = 5$ / $N = 3.000$

$P_0(0{,}04) = 3.000 * 1{,}04^{-5} \approx 2.465{,}78$

b) $T = 8$ / $i = 0{,}05$ / $z = 80$

$z = i * N$

$80 = 0{,}05 * N \quad | : 0{,}05$

$\Leftrightarrow N \approx 1.600$

$$P_0\ (0{,}04) = 80 * \frac{1{,}04^8 - 1}{1{,}04 - 1} * 1{,}04^{-8} + 1.600 * 1{,}04^{-8}$$

$$\approx 1.707{,}72$$

(c) $g = 0{,}02$, $r = 0{,}04$, $D_0 = 20$

$$P_0\ (0{,}04) = 20 * \left(\frac{1{,}02}{0{,}04 - 0{,}02}\right) \approx 1.020$$

Extraaufgabe: Rendite :

Aufgabe 5: ***(12 Punkte)***

Angela kauft am 1.3.2003 neun Hektar Wald mit 2 925 Kubikmeter Holzvorrat zu einem Preis von 140 900 Euro. Die dort angesiedelte rustikale Blockhütte erhält sie gratis dazu und bewohnt diese ab sofort. Um mollig warm durch den nächsten Winter zu kommen, schlägt Angela am gleichen Tag 30 Kubikmeter Holz zur Trockenlagerung. Da sie exakt diese Menge pro Jahr zum Heizen benötigt, wiederholt sie die Prozedur in den darauffolgenden Jahren jeweils am 1. März mit unveränderter Holzmenge. Am 29. Februar 2016 brennt die Holzhütte nieder. Zur Aggressionsreduktion holzt Angela am darauffolgenden Tag ihren gesamten Wald ab und verkauft ihren aktuellen Holzbestand an den Landwirt Horst für 50 Euro pro Kubikmeter. Die natürliche Wachstumsrate des Waldes (gemessen in Kubikmeter) liegt konstant bei 3% pro Jahr. Bestimmen Sie den internen Zinsfuß des Zahlungsstroms.

Hinweis: Betrachten Sie ausschließlich den Kaufpreis am 1.3.2003 und den Verkaufserlös am 1.3.2016.

$g = 0{,}03$ Wachstum Holzbestand pro Jahr

H_t = Holzvorrat in t $(t_0 = 01.03.2003)$

$$H_{13} = H_0 * (1+g)^{13} - 30 * \underbrace{\frac{(1+g)^{13}-1}{g}}_{\hat{=}\ q-1} * \overbrace{(1+g)}^{\text{vorschüssig}}$$

$$H_{13} = 2.925 * 1{,}03^{13} - 30 * \frac{1{,}03^{13}-1}{0{,}03} * 1{,}03$$

$$= 3.812{,}87$$

Verkaufserlös E in t_{13}:

$$E = 3.812{,}87 * 50 = 190.643{,}57$$

Interner Zinsfuß:

$V_T = 190.643{,}57$

$V_0 = 140.900$

$$r = \sqrt[13]{\frac{190.643{,}57}{140.900}} - 1 = 2{,}35\ \%$$